Università degli Studi di Trento
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Seminario

SUL VOLUME DEI SOLIDI: ARCHIMEDE, KEPLERO E CAVALIERI

Marina Brentegani e Francesca Gatti

Anno Accademico 2003/2004

Indice

1 Introduzione

Questo seminario si propone di analizzare i metodi dimostrativi di tre matematici: Archimede, Keplero, Cavalieri. Tutti si sono occupati dello studio dei solidi di rotazione, e gran parte dei teoremi scelti come esempio di applicazione dei metodi riguardano questi solidi. Tali teoremi permettono un confronto diretto tra i diversi apporcci all'argomento.

Si tratta anche di un percorso storico: a partire dai 5 solidi considerati da Archimede (sfera, ellissoide schiacciato e allungato, paraboloide, iperboloide) si arriva ai 92 solidi presentati da Keplero. Cavalieri ne sceglierà alcuni per testare il suo principio, il quale si può estendere in maniera generale a una più vasta gamma di solidi di rotazione.

Nella sezione 3 illustriamo i metodi dimostrativi di Archimede e Keplero. Vengono quindi riportati teoremi di Archimede ridimostrati da Keplero, in modo da poter cogliere le differenze tra i due approcci.

La sezione 4 è dedicata alla presentazione dei solidi di Keplero ottenuti mediante la rotazione di sezioni coniche attorno ad un asse parallelo o perpendicolare agli assi di simmetria. Segue una traduzione dei teoremi di Keplero relativi.

La sezione 5 si concentra sul metodo dimostrativo di Cavalieri. Particolare attenzione viene rivolta ai teoremi sui solidi che Cavalieri sceglie tra quelli già trattati da Keplero. Il teorema illustrativo ne è un esempio.

Il seminario inizia con la presentazione dei tre personaggi storici e dei loro contributi più importanti; vengono introdotte le opere da cui sono tratti i teoremi illustrativi.

2 Presentazione degli autori e delle opere

2.1 Archimede

Il più grande matematico dell'antichità classica ed uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Nacque e morì a Siracusa: certa è la sua data di morte (212 a.C.), incerta è la data di nascita, che si fissa intorno al 287 a.C. Assai poco sappiamo della sua vita: si hanno numerose testimonianze, ma di solito si tratta di racconti fantasiosi che non superano la prova della critica storica.

Compì un viaggio in Egitto, studiando ad Alessandria; tornò poi a Siracusa, dove scrisse la maggior parte delle sue opere. In particolare fu in corrispondenza con Eratostene di Cirene, direttore della Biblioteca di Alessandria, e con Conone di Samo e Doristeo, successori di Euclide nella scuola geometrica alessandrina. Alessandria era allora il centro della scienza greca, in cui la tradizione di Euclide era ancora viva.

Gli è attribuita la famosa proposizione nota sotto il nome di principio di Archimede (un corpo solido immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato). Sulla scorta degli Elementi di Euclide, Archimede inizia quelle ricerche di matematica superiore, che rappresentano il sorgere di quei procedimenti che avranno poi il loro sviluppo nel moderno calcolo infinitesimale. Archimede in realtà va oltre Euclide, non soltanto per i risultati che Euclide non raggiunse (valga per tutte la determinazione della superficie sferica), ma anche per l'abbandono del caratteristico "platonico" distacco da ogni pur minimo accenno alle applicazioni (invano si cercherebbero, negli Elementi euclidei, regole pratiche di misura: di queste si trovano esposti soltanto i presupposti teorici); Archimede, invece, non disdegna gli esempi numerici e le pratiche applicazioni. Inoltre Archimede applicò la matematica alla meccanica, all'idrostatica e alle altre discipline scientifiche.

Le opere di Archimede giunte fino a noi e sicuramente autentiche, nell' ordine di stesura ritenuto più probabile, sono: *Equilibrio dei piani*, libro I, *Quadratura della parabola*, *Equilibrio dei piani*, libro II, *Sfera e cilindro*, libri I e II, *Metodo*, *Spirali*, *Conoidi e sferoidi*, *Galleggianti*, *Misura del cerchio*, *Arenario*.

L'opera *Sulla sfera e il cilindro* può dirsi la diretta continuazione degli Elementi di Euclide. Essa infatti tratta delle stesse figure solide (cilindro, cono, sfera) già trattate negli Elementi euclidei: ma mentre in questi vengono dati solo i presupposti teorici per alcune determinazioni di volume, nell'opera di Archimede troviamo la regola per il calcolo effettivo del volume della sfera (PROPOSIZIONE 34 del libro I, [1] pagg. 155-160): detto volume è il quadruplo di quello del cono avente per base il circolo massimo e per altezza il raggio della sfera. Archimede determina inoltre per primo la superficie della sfera, che dimostra essere uguale al quadruplo del circolo massimo (PROPOSIZIONE 33, [1] pagg. 152-155). Tra i postulati premessi all'opera si trova quello comunemente detto postulato di Archimede, che tuttavia già si trova in Euclide (def. IV del libro V degli Elementi): date due grandezze omogenee A e B, con $A > B$, esiste un multiplo della minore che supera la maggiore, ovvero esiste un numero naturale n tale che $nB > A$. In Archimede si tratta della disuguaglianza $n(A - B) > C$, con C grandezza omogenea ad A e B.

Archimede giustificava i propri risultati con un ragionamento per assurdo, del tutto rigoroso, ma non costruttivo; nel 1906 si scoprì in una pergamena una lettera di Archimede a Eratostene (*Sul metodo*) che ha rivelato come Archimede seguisse in realtà un procedimento di tipo infinitesimale, del tutto simile a quello degli indivisibili riscoperto quasi 2000 anni dopo da Cavalieri. Il metodo di esaustione non ha alcun valore euristico: non conduce a trovare un risultato, ma permette di dimostrare rigorosamente l'esattezza di un risultato al quale si sia giunti per altra via. Ad esempio, la classica PROPOSIZIONE 33 del libro I di *Sfera e cilindro*, cioè che la superficie di qualunque sfera è quadrupla del circolo massimo, è dimostrata con il metodo per esaustione, ma i matematici si chiedevano se Archimede fosse giunto a conoscere questo risultato, che evidentemente doveva aver raggiunto per altra via, con l'intuizione o per mezzo di un originale metodo di ricerca non rigoroso, per poi dimostrare rigorosamente, col metodo di esaustione, l'esattezza della relazione. Nel 1906 il filologo danese J.L.Heiberg (autore di un'edizione critica delle opere di Archimede) ritrovò, in un palinsesto a Costantinopoli, il manoscritto di un'opera di Archimede che nel corso dei secoli era andata perduta: il *Metodo* (più precisamente, *Metodo sui teoremi meccanici*, [1] pagg.555-610), in cui Archimede indica la via seguita per raggiungere preventivamente questi risultati. In Keplero e poi Galileo, Cavalieri, Torricelli abbiamo l'uso di metodi "spregiudicati" per il calcolo di aree e volumi, che furono giudicati sfavorevolmente dai più stretti seguaci di Archimede, in quanto privi del rigore che egli aveva instaurato nelle sue opere classiche. Si spiega così l'opposizione di Guldino. In effetti i cosiddetti anti-archimedei del Rinascimento, che aprirono la strada alla creazione del calcolo infinitesimale, ripercorsero inconsapevolmente le strade aperte da Archimede stesso.

La *Misura del cerchio* ([1] pagg. 213-231) è un'opera brevissima (contiene soltanto tre proposizioni) ma della massima importanza. Nella PROPOSIZIONE 1 ([1] pagg. 225-227) si dimostra, con il classico rigoroso metodo di esaustione, che un cerchio è uguale a un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale alla circonferenza del cerchio e l'altro cateto uguale al raggio. Nella PROPOSIZIONE 3 ([1] pagg. 228-231) si calcola, con mezzi geometrici e aritmetici, che il rapporto della circonferenza al diametro per qualunque cerchio (il famoso π) è compreso tra $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{10}{70}$. Il valore di destra uguale a $\frac{22}{7}$, ci dà con numeri interi abbastanza piccoli un ottimo valore approssimato per eccesso di detto rapporto che la matematica moderna mostrerà essere un numero irrazionale.

Nell'opera *Sulla quadratura della parabola* ([1] pagg. 471-515) viene determinata, col rigoroso metodo di esaustione, l'area del segmento parabolico (uguale ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo inscritto).

Nell'opera *Conoidi e sferoidi* ([1] pagg. 233-310) Archimede studia i solidi ottenuti mediante la rotazione completa di una curva piana attorno ad un'asse fisso. Chiama conoide rettangolo il solido generato dalla rotazione completa di una parabola attorno al suo asse, conoide ottusangolo il solido ottenuto facendo compiere una rotazione completa ad una parabola intorno al suo asse trasverso, chiama sferoide il solido ottenuto facendo ruotare una ellisse intorno ad un suo asse (distingue lo sferoide allungato da quello appiattito a seconda che la rotazione avvenga attorno all'asse maggiore o all'asse minore). In tutte le dimostrazioni Archimede applica il metodo di esaustione. In quest'opera si ottengono risultati fondamentali per quanto riguarda la determinazione del volume di segmenti di conoidi e di parti di sferoide.

Riferimenti bibliografici: [1], [4], [5] volume II pagg. 82-83, [6] volume I pag. 383.

2.2 Keplero

Johannes Kepler è noto in Italia con il nome di Keplero. Nacque a Weil, Württemberg, nel 1571, morì a Ratisbona nel 1630.

Fu avviato alla carriera ecclesiastica, ma l'essersi dichiarato seguace del sistema copernicano gli chiuse la via agli ordini. Avviato agli studi ecclesiastici nel seminario di Tübingen, coltivò prevalentemente la matematica, sotto la guida di Maestlin, che lo iniziò alla astronomia copernicana. Accettò un insegnamento di matematica a Graz (1594) dove acquisì una certa fama di astrologo. Cacciato, dopo 6 anni di residenza, dalla Stiria come protestante, si rifugiò in Ungheria e poi andò a Praga presso Brahe, con il quale aveva già da alcuni anni uno stretto rapporto. Nominato assistente di Brahe (1600) alla morte di lui (1601) gli successe nella carica di matematico imperiale, che tenne per 11 anni fino alla morte dell'imperatore Rodolfo (1612). Accettò allora un insegnamento a Linz ma a causa della persecuzione dei protestanti lasciò l'Austria: cominciò allora una vita piena di incertezze e di disagi, fino alla morte.

Persuaso della validità della concezione copernicana, si propose come compito fondamentale quello di consolidarne la teoria e di svelare le leggi dei moti planetari.

Già nella sua opera giovanile, il *Mysterium cosmographicum* (1596), egli tenta una geometrizzazione del sistema del mondo collegando i raggi delle sfere circoscritte o inscritte dei 5 poliedri regolari: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro e ottaedro. Il sistema copernicano aveva rivoluzionato la tradizionale visione del cosmo, si scoprì l'esistenza di enormi spazi tra i pianeti e si cercò di determinare la misura delle orbite dei pianeti.

Venuto in possesso del copioso materiale di osservazione di Brahe, si accinse al problema della vera forma delle traiettorie planetarie. Il pianeta al quale si rivolse fu Marte; capì che l'orbita di tale pianeta era un'ellisse, un fuoco della quale era occupato dal Sole. Durante questi lavori per la forma della traiettoria di Marte - donde la prima legge formulata da Keplero: la curva descritta da ciascun pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei fuochi - egli poté intravedere anche una legge che regola il moto del pianeta sulla traiettoria ellittica, la cosiddetta legge delle aree o seconda legge di Keplero, secondo la quale il raggio vettore eliocentrico del pianeta descrive attorno al Sole aree uguali in tempi uguali. Questi due risultati furono pubblicati nella celebre opera *De motibus stellae Martis* (1609) e più tardi estesi a tutti i pianeti nell'*Epitome astronomiae copernicanae*.

Nel 1618, nella sua vasta opera *Harmonices mundi* poté dare una legge che abbraccia le orbite planetarie nel loro insieme: questa terza legge di Keplero afferma che i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti stanno tra loro nel rapporto dei cubi dei semiassi maggiori orbitali.

Nel 1604 osservò e studiò l'apparizione di una stella nuova nella costellazione di Ofiuco, in coincidenza di una rara congiunzione di Marte, Giove e Saturno. Il *De stella nova in pede Serpentarii* (1606) dimostrò che il nuovo astro (oggi conosciuto come supernova di Keplero) appartiene alla categoria delle stelle fisse.

Oltre alle celebri ricerche sui moti planetari Keplero si occupò anche di fondamentali argomenti di ottica, di cui la sua opera *Dioptrice* costituisce proprio l'inizio e la base.

Immensa fu l'importanza dell'opera di Keplero per l'astronomia e per la meccanica. Con le sue due prime leggi rese possibile istituire i calcoli precisi delle posizioni planetarie in cielo e poté calcolare quelle tavole fondamentali dei pianeti che egli pubblicò nel 1627 sotto il nome di *Tabulae rudolphinae*, le prime fondate sul moto eliocentrico kepleriano dei pianeti.

Egli sviluppò un metodo per calcolare il volume di solidi di rivoluzione che può essere visto come un contributo allo sviluppo del calcolo infinitesimale. Questo si trova nell'opera *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz, 1615. Nella lettera dedicatoria ([2] pagg. 12-13) si legge che in occasione del suo secondo matrimonio Keplero fu incuriosito dal metodo utilizzato per calcolare il volume delle botti di vino, stimato facendo scivolare in diagonale attraverso l'imboccatura della botte un'asta rigida, e quindi utilizzando una misurazione lineare. Sorprendentemente verificò che la forma della botte è quella che permette di contenere la maggior quantità di vino.

Alcuni autori hanno parlato dell'irrazionalità di Keplero. Egli tuttavia non credeva che l'universo fosse governato da leggi imprecise non soggette a principi razionali. Egli sosteneva infatti che l'universo fosse stato creato da Dio secondo un disegno matematico, comprensibile attraverso intuizioni, ma di tipo razionale.

Riferimenti bibliografici: [2], [4], [5] volume XI pagg. 592-593, [6] volume VII pag. 384.

2.3 Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasce a Milano, molto probabilmente nel 1598. Entra ancora adolescente nell'Ordine dei Gesuati di San Gerolamo, a Milano, dove il 20 settembre 1615 è promosso agli Ordini minori.

Negli anni 1616-1620 si trasferisce nel convento di Pisa dei Gesuati dove segue il corso di matematica di Benedetto Castelli, uno dei primi e più illustri discepoli di Galilei. Castelli presenta il giovane frate a Galilei, allora Primario e Filosofo del Granduca di Toscana, il quale rimane impressionato dalle eccezionali capacità del giovane.

Dal 1620 alla primavera del 1623 vive a Milano e sviluppa le sue prime idee sugli Indivisibili. Il 5 giugno 1621 é promosso al Diaconato.

Il 2 febbraio 1626, dopo aver vissuto a Lodi dall'estate 1623 al gennaio 1626 scientificamente isolato, arriva a Roma dove spesso è ospite di mons. Ciampoli al quale dedicherà il suo trattato.

Nell'agosto 1626 è elevato alla dignità del "priorato" e nominato Priore nel Convento dei Gesuati di Parma.

Nel febbraio del 1629 spedisce a Cesare Marsili, suo principale appoggio politico, amico di Galilei e intendente di cose scientifiche, il manoscritto dei primi sei libri degli Indivisibili perché ne tenesse conto nella nomina del nuovo Matematico alla "lettura" di Bologna, che riceve il 20 ottobre 1629, grazie all'intervento di Galilei. Questa carica verrà rinnovata fino alla morte.

Tra aprile e maggio del 1635 viene stampata la *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, in 7 fascicoli con numerazioni separate, i primi cinque libri erano già stati stampati il 22 luglio 1634. Nel luglio 1636 visita Galileo ad Arcetri.

Cavalieri muore a Bologna nel 1647, stesso anno in cui muore a Firenze Evangelista Torricelli, con cui Cavalieri era stato in stretta collaborazione scientifica dopo la morte del comune maestro Galilei, avvenuta nel 1642 in Arcetri.

Analizzando l'opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, si nota già nel titolo come l'Autore voglia sottolineare che la Geometria è da lui promossa con una *nova ratio*, con un metodo nuovo. Bonaventura ebbe la convinzione di aver sviluppato un *"pensiero...lontano da tutto quello ch'i'ho potuto trovare scritto da altri"* (lettera a Galileo del 16 febbraio 1622, [3] pag. 730).

Benché ci fosse il sospetto che Archimede nelle sue più difficili 'quadrature' e 'cubature' si fosse servito di un metodo analogo a quello usato dal Cavalieri, questi non poteva essere a conoscenza del *Metodo* archimedeo, riscoperto quasi tre secoli più tardi. Il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri è inoltre una *ratio* fondamentalmente diversa dal metodo utilizzato da Keplero nella *Stereometria delle botti*.

Si può affermare con certezza che il primo metodo degli indivisibili, che si trova nel libro II ([3] pagg. 209-211), è stato ideato ed elaborato tra il 15 dicembre 1621 e il 16 febbraio 1622, in un breve arco di tempo quindi; il secondo metodo è introdotto nel libro VII ([3] pagg. 654-669).

Cavalieri parla della sua opera come *"quel trattato ...intorno le misure dei solidi"*, *"Vado dimostrando alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui, et in particolare la quadratura della parabola, divers'ancora da quella di V.S."* scrive Cavalieri nella lettera a Galilei del 15 dicembre 1621 ([3] pag. 727). Anche dopo la pubblicazione permane nell'Autore qualche residuo di dubbio non sulla nova ratio, ma sul rigore delle dimostrazioni, è per questo spinto a controllare e perfezionare il metodo applicandolo a un numero sempre maggiore di "piani" e di solidi, perché la quantità dei risultati veri è per lui misura abbastanza valida (se non assoluta) della bontà del nuovo metodo.

Bonaventura Cavalieri dedica il suo trattato all'Illustrissimo e Reverendissimo monsignor Giovanni Ciampoli ([3] pag. 39), punto d'appoggio del Nostro al suo arrivo a Roma nel febbraio 1626. Il Ciampoli accoglie benevolmente il giovane frate appassionato di geometria.

Mostrando la sua diffidenza sul successo di quest'opera Cavalieri invita Ciampoli a leggere *"le cose geometriche che sono infatti gravate da moltissime diffi-*

coltà, dalle quali le menti inferme degli uomini sogliono troppo aborrire, come da un farmaco amaro, benché esse siano saluberrime per l'ingegno" ([3] pag. 42). Cavalieri si sofferma sull'importanza della *"Geometria regina, e capitale, delle altre arti tutte"*([3] pag. 42), che deve però essere ricercata solo per amore di conoscenza, senza l'utilizzo di strumenti meccanici.

Riferimenti bibliografici: [3], [6] volume III pag. 301.

3 Confronto tra Archimede e Keplero

3.1 Il metodo di Archimede

Archimede si inserisce nella Grecia del III secolo a.C. e quindi può disporre delle conoscenze e dei risultati cui geometri precedenti erano giunti. Eudosso di Cnido, ad esempio, nel secolo precedente aveva introdotto il *metodo di esaustione*, largamente utilizzato da Archimede, che lo ha portato ai suoi massimi livelli, e anche la teoria delle proporzioni.

In questo periodo la geometria non si preoccupava di associare ad aree o volumi un valore numerico preciso, ma piuttosto di indicare rapporti di equivalenza tra figure o solidi oppure, per mezzo delle proporzioni, definire quando due grandezze sono nello stesso rapporto di altre due. Le proporzioni permettevano anche di evitare i paradossi dovuti all'incommensurabilità, scoperta all'inizio del V secolo a.C. dalla scuola pitagorica. La scoperta dell'incommensurabilità segna il passaggio da una geometria di approssimazione (legata allo stato pratico) ad una geometria di precisione (legata ad uno stato teorico, in cui gli enti geometrici vengono idealizzati e considerati a sé stanti, distaccati dalla materia).

Eudosso si dedica allo studio del rapporto tra grandezze incommensurabili e del confronto tra superfici o solidi nei casi meno semplici. Supera il problema dell'infinito indicando il rapporto tra due grandezze omogenee non esplicitamente ma attraverso l'uguaglianza con un altro rapporto (proporzioni).

Riferimenti bibliografici: [1], [4], [5].

3.1.1 Il metodo di esaustione

Il metodo di esaustione consiste nella dimostrazione dell'equivalenza tra due figure per assurdo, ovvero dimostrando l'impossibilità che l'una possa essere maggiore o minore dell'altra. Questo è il metodo dimostrativo maggiormente utilizzato da Archimede.

Gli strumenti che Archimede utilizza per applicare il suo metodo dimostrativo sono la PROPOSIZIONE I,2 dell'opera *Sulla sfera e il cilindro* ([1] pagg. 80-83) e la PROPOSIZIONE X,1 degli *Elementi di Euclide*. La seguente PROPOSIZIONE I,2 è alla base di proposizioni della stessa opera basilari per la trattazione di teoremi più complessi.

PROPOSIZIONE 2 libro I *Sulla sfera e il cilindro*
Date due grandezze disuguali, è possibile trovare due rette disuguali tali che la retta maggiore abbia rispetto alla minore rapporto minore di quello che la grandezza maggiore ha rispetto alla grandezza minore.

In sostanza, questa proposizione afferma che dato un numero reale, maggiore o minore dell'unità, è sempre possibile trovare un altro reale che differisca da questa meno del precedente, restando maggiore o minore. La proposizione di Euclide invece è il corrispettivo di affermare che la successione $\frac{1}{2^n}(n = 0, 1, ...)$ tende al limite zero, cioè a partire da un certo valore di n i suoi elementi divengono più piccoli di qualunque numero fissato. Si tratta dunque della possibilità di avere un avvicinamento indefinito, un'approssimazione sempre migliore. Entrambe le proposizioni si basano sull'idea che, date due grandezze A e B omogenee, con $A > B$, esiste un multiplo della loro differenza, $n(A - B)$, maggiore di qualsiasi valore di C, grandezza omogenea ad A e B assegnato (V postulato, *Sulla sfera e il cilindro*, [1] pag. 79).

L'idea che sta alla base della dimostrazione per assurdo con il metodo di esaustione è quella di considerare una successione prolungabile quanto si voglia, con termini minori di due grandezze A e B. Si suppone in un primo momento che A sia la maggiore. Se i termini della successione sono tali da permettere un avvicinamento indefinito, che sopra abbiamo visto essere possibile, essi possono approssimare A in modo tale che tra A e B se ne trovi uno. Dunque viene a cadere la condizione che tali termini siano minori tanto di A che di B. Si dimostra quindi che le due grandezze A e B non possono avere differenza tra di loro, trattando anche l'equivalente con un'approssimazione per eccesso.

Riferimento particolare: [1] Introduzione, pagg. 15-19.

3.1.2 Il metodo meccanico

Il metodo dimostrativo per assurdo è rigoroso, ma si tratta di un metodo indiretto, che presuppone l'aver ottenuto la tesi mediante metodi diretti magari meno rigorosi. Opinione diffusa è che molti risultati cui Archimede è giunto derivino da vere e proprie intuizioni. Egli si compiace di essere stato il primo ad accorgersi dell'esistenza di alcune relazioni tra figure piane o solide, che sono indicate con il termine "simmetria" nella prefazione all'opera *Sulla sfera ed il cilindro*. Ad esempio, Archimede trova che il rapporto tra superficie di una sfera e il suo cerchio massimo è di 4:1 (PROPOSIZIONE 33, *Sulla sfera e il cilindro*, [1] pagg. 152-155) e che il rapporto tra il segmento parabolico e il triangolo in esso inscritto è di 4:3 (PROPOSIZIONE 17, *Quadratura della parabola*, [1] pagg. 504-505).

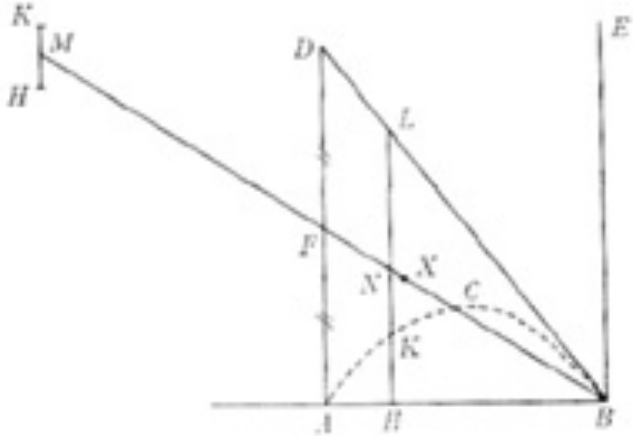
> *Queste proprietà erano da sempre inerenti alla natura delle figure menzionate ed erano ignorate da coloro che prima di noi si occuparono di geometria: nessuno di loro si era accorto che per queste figure c'è una simmetria.*
> Prefazione a *Sulla sfera e il cilindro*, libro I ([1] pag. 70).

Nel caso di grandezze incommensurabili, Archimede si preoccupa di dare un'approssimazione del rapporto mediante numeri interi più piccoli possibile (come nel caso dell'approssimazione di π a $\frac{22}{7}$, PROPOSIZIONE 2 della *Misura del cerchio*, [1] pagg. 227-228).

Archimede cerca una dimostrazione della fondatezza di tali rapporti mediante un metodo da lui stesso definito *metodo meccanico*, che tuttavia non consiste nel determinare meccanicamente tali proprietà, ma nel ricorrere a concetti della meccanica (leve in equilibrio, baricentro) nella dimostrazione. L'applicazione di tale metodo serviva da conferma, ma non si trattava di un metodo dimostrativo rigoroso. Dunque Archimede nelle sue opere ricorre poi alla rigorosa dimostrazione mediante il metodo per assurdo. Una delle ragioni per cui Archimede non riconosce come valido il metodo meccanico è il ricorso a considerazioni di carattere infinitesimale: egli considera le figure come riempite da segmenti tra loro paralleli ad esse interni.

Per quanto riguarda ad esempio le figure piane, questo metodo prevede di paragonare l'area della superficie a cui si è interessati a quella di una seconda figura, di cui si conosce l'area e la posizione del baricentro, X. La seconda figura viene scelta in modo opportuno, diversa caso per caso.
Si considerano le due figure come costituite dall'insieme di tutti i segmenti in esse tracciati parallelamente ad un certa direzione, se esse sono piane, e similmente nel caso di solidi si considerano come costituite dalle loro sezioni piane parallele ad una certa giacitura.
Si considera una leva immaginaria. Nelle costruzioni fatte da Archimede, nel caso di figure piane essa si trova sul prolungamento della mediana della seconda figura, nel caso di solidi sul prolungamento dell'asse di simmetria della prima figura considerata. Indichiamo i punti come nella figura sottostante. Si taglia il prolungamento della retta considerata in M in modo che il segmento staccato dalla retta sulla figura, o nel solido, FB, sia equivalente a quello esterno alla figura, FM.
Il punto M così determinato è un estremo della leva, il fulcro è F, il secondo estremo è B, l'altra intersezione tra la retta e la figura. Si staccano sulle due figure segmenti, o sezioni piane, tra loro paralleli. Archimede verifica che tra segmenti corrispondenti, HK sulla prima figura e HL sulla seconda, sussiste il rapporto: $HK : HL = FN : FM$, con N punto di intersezione della leva con HL. Supponendo i segmenti "pesanti", tale proporzione equivale all'equilibrio della leva MN sul fulcro F. Considerando le figure come somma di tali segmenti, si trova che le aree hanno tra loro lo stesso rapporto che c'è tra MF e XF. Infatti conosciamo la posizione del baricentro della seconda figura, X, e consideriamo l'area della prima come somma di tutti i segmenti "pesanti" che la compongono, traslati in modo da avere tutti punto medio, e quindi baricentro, in M. Nel caso di solidi si procede in modo del tutto analogo.
La proporzione per l'equilibrio della leva indica dunque il rapporto tra le aree o i volumi.

Riferimento particolare: [1] Introduzione, pagg. 19-26.



[1] pag. 20

3.2 Il metodo di Keplero

La *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* fu pubblicata da Keplero nel 1615. Nella prefazione si trova il motivo ispiratore degli argomenti e degli studi trattati nell'opera: la vendemmia in Austria, a Linz, nel 1613 era stata abbondantissima e i prezzi dell'uva erano molto bassi. Andando a comperare una botte di vino, Keplero si stupì molto nel vedere che il venditore per calcolare il volume della botte faceva uso di un'unica misura lineare: introduceva una bacchetta nella botte e ne ricavava il volume, o meglio una sua approssimazione. Questo fatto è presentato da Keplero nella *Stereometria dolii austriaci in specie*.

La notorietà di Keplero è dovuta principalmente ai suoi studi in campo astronomico. Essi richiesero l'applicazione di conoscenze matematiche e geometriche che Keplero si preoccupò sempre di dimostrare.

Nelle prime due sezioni dell'opera, *Stereometria Archimedea* ([2] pagg. 13-36) e *Supplementum ad Archimedem* ([2] pagg. 37-71), Keplero studia rispettivamente rapporti tra aree e volumi di figure piane e solide già considerate da Archimede, ma dimostrate con metodo diverso, e il volume dei solidi ottenuti mediante la rotazione delle sezioni coniche. Solo cinque di essi vennero trattati da Archimede: sfera, conoide parabolico, conoide iperbolico, sferoide oblungo, sferoide schiacciato. Si ottengono mediante la rotazione delle coniche attorno al proprio asse di simmetria. Keplero considera altri 87 solidi, considerando diverse posizioni per l'asse di rotazione.

Nelle sue dimostrazioni Keplero, a differenza di Archimede, utilizza un metodo dimostrativo diretto. Non per questo i risultati ottenuti vennero accettati più facilmente. La *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* infatti suscitò reazioni e critiche sin dalla sua pubblicazione. Tra i critici più riconosciuti troviamo Guldin (1577-1643) e Alexander Anderson.

Uno dei temi ricorrenti era l'affidamento fatto da Keplero sulla propria intuizione. Essa infatti non garantisce la validità delle affermazioni fatte, e il metodo dimostrativo di Keplero non è abbastanza rigoroso da evitare questi errori. Ad esempio Cavalieri nel COROLLARIO 21 al TEOREMA 34 del libro II della sua *Geometria degli indivisibili* ([3] pag. 405) corregge il TEOREMA 25 di Keplero ([2] pagg. 62-63), riguardante il rapporto tra i solidi generati da un segmento circolare ruotando attorno alla base o al suo asse. Guldin affermava che il processo per cui un segmento circolare piccolo quanto si voglia possa essere considerato come linea retta, largamente usato da Keplero, non poteva essere dimostrato in modo rigoroso.

Un'altra critica rivolta a Keplero riguardava la non generalità del metodo. In base alla propria intuizione Keplero utilizzava nelle sue dimostrazioni costruzioni geometriche ausiliarie. Esse tuttavia erano diverse caso per caso.

L'aspetto più innovativo del metodo dimostrativo di Keplero era il considerare figure o solidi composti da infiniti e minimi elementi piani o solidi. Si tratta di un vero e proprio procedimento di integrazione definita, cioè nel calcolo ad esempio di un volume per mezzo della sua divisione in "corpicciioli" che pur essendo infinitesimi non sono privi di spessore. Questa costruzione viene utilizzata nella prima parte dell'opera ([3] pag. 50, [2] pagg. 14-15).

Nella seconda sezione, *Supplementum ad Archimedem*, il principale metodo dimostrativo è il cosiddetto "modello a buccia"(*Schalenmodell*, [2] Nachbericht, pag. 444). Keplero indica un solido oppure la somma di più solidi equivalenti a quello iniziale, ma le cui proprietà siano note. Ad esempio, l'anello risulta essere equivalente al cilindro avente la figura generatrice come base e per altezza la circonferenza descritta dal centro di essa durante la rotazione ([2] TEOREMA XVIII, pag. 47).

Il solido considerato viene suddiviso in modo infinitesimale in cilindri cavi, coassiali, con spessore costante, ma altezza variabile. Poi si trasformano tali cilindri in prismi dello stesso volume, che vengono infine sommati. Ciascun cilindro viene trasformato in un solido detto zoccolo, e la somma di tutti dà un segmento cilindrico che ha per base la figura generatrice.

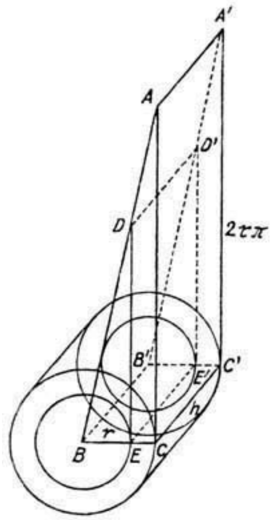
Lo zoccolo in cui è trasformato il cilindro cavo nella figura è il prisma $ADECC'A'D'E'$. Si considerano il cilindro pieno ed il cilindro che occuperebbe la cavità. Entrambi hanno altezza h, il primo ha raggio BC ed il secondo BE. Lo zoccolo si forma dalla differenza tra il prisma $ABCC'B'A'$ equivalente al cilindro pieno (ha per base il rettangolo di dimensioni h e BC che lo genera e ha altezza CA corrispondente alla circonferenza di base del cilindro) ed il prisma $DBEE'B'D'$ equivalente al cilindro che occuperebbe la cavità (ha per base il rettangolo di dimensioni h e BE che lo genera e altezza ED corrispondente alla circonferenza di raggio BE). Infatti:

$$\text{volume cilindro pieno} = \pi r^2 h$$
$$\text{volume prisma a base triangolare} = ((r \cdot 2\pi r)/2)h = \pi r^2 h.$$

All'aumentare del numero di cilindri considerati migliora l'approssimazione della costruzione.

Questo solido equivalente viene suddiviso in più elementi, ciascuno dei quali ha un preciso significato geometrico, con volume calcolabile.

Figura tratta da [2] pag. 443



Riferimenti bibliografici: [2], [3], [5], [6].

3.3 Confronto tra i metodi dimostrativi

3.3.1 Proposizioni di Archimede citate da Keplero in *Stereometria Archimedea*

Nella prima parte dell'opera di Keplero si ritrovano alcuni dei teoremi di Archimede, ma dimostrati seguendo un altro metodo dimostrativo. Le proposizioni citate da Keplero sono:

- dall'opera *Misura del cerchio* le proposizioni 2 e 3 ([1] pagg. 227-231), riguardanti l'approssimazione di π e il rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del diametro;

- dall'opera *Quadratura della parabola* la PROPOSIZIONE 17 ([1] pagg. 504-505), concernente il calcolo dell'area del segmento parabolico;

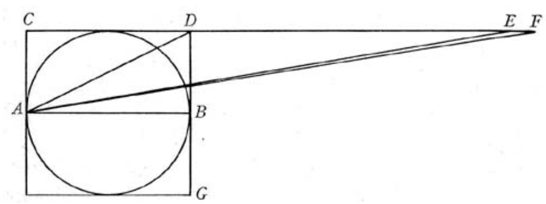
- dall'opera *Conoidi e sferoidi* le proposizioni 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 24, 27 ([1] pagg. 251-307), che riguardano il rapporto tra l'area dell'ellisse e le sue dimensioni, il rapporto tra due coni, il tipo di sezione ottenuto da un conoide o da uno sferoide con piani diversi, e il loro rapporto con coni particolari;

- dall'opera *Sfera e cilindro* le proposizioni 33 ([1] pagg. 152-155) e 42 ([1] pagg. 172-174) del libro I, riguardanti la superficie della sfera e di un segmento sferico, e la PROPOSIZIONE 2 del libro II ([1] pagg. 185-188), che tratta il rapporto tra il volume del segmento sferico e di un cono avente uguale base.

3.3.2 Teoremi illustrativi

Per comprendere a fondo la diversità tra i metodi dimostrativi abbiamo scelto proposizioni di Archimede richiamate e ridimostrate da Keplero nella *Stereometria archimedea*. Per quanto riguarda Archimede, i due teoremi considerati sono la PROPOSIZIONE 2 dell'opera *Misura del cerchio* ([1] pagg. 227-228) e la PROPOSIZIONE 34 dell'opera *Sulla sfera e il cilindro* ([1] pagg. 155-159). Corrispondono ai TEOREMI 2 ([2] pagg. 15-16) e 13 ([2] pagg. 25-26) dell'opera di Keplero citata.

> PROPOSIZIONE 2 *Misura del cerchio*, Archimede
> *Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.*

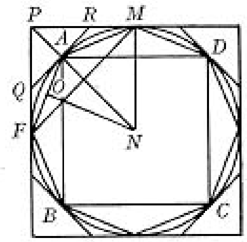


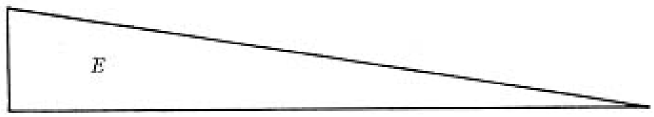
Sia un cerchio, il diametro del quale [sia] la AB, e si circoscriva [ad esso] il quadrato CG, e il doppio di CD sia DE, ed EF sia la settima parte di CD. E poiché il [triangolo] ACE ha rispetto al [triangolo] ACD il rapporto che 21 ha rispetto a 7, il [triangolo] ACD ha rispetto a [quello] AEF il rapporto che 7 ha rispetto a 1 *(Euclide, VI, 1)*; dunque il triangolo ACF ha rispetto al triangolo ACD il rapporto che 22 ha rispetto a 7 *(Euclide, V, 24 o V, 2).* Ma il quadruplo del triangolo ACD è il quadrato CG *(Euclide, I, 34)*, e il triangolo $ACDF$ è uguale al cerchio [di diametro] AB (PROPOSIZIONE 1): il cerchio ha dunque rispetto al quadrato CG il rapporto che 11 ha rispetto a 14.

Per completezza riportiamo anche la proposizione richiamata:

> PROPOSIZIONE 1 *Misura del cerchio*, Archimede ([1] pagg. 225-227)
> *Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto].*

Si abbia il cerchio $ABCD$ [che] rispetto al triangolo E [sia] come s'è supposto: dico che esso è uguale [al triangolo]. Infatti sia, se possibile, maggiore il cerchio, e si inscriva in esso il quadrato AC, e si dividano [successivamente] gli archi della circonferenza per metà, e siano i segmenti [circolari] già minori dell'eccesso di cui il cerchio supera il triangolo; il poligono [$AMDCBF$ così ottenuto] sarà dunque pure maggiore del triangolo. Si prenda il centro N e la perpendicolare NO [al lato AF]; dunque la NO è minore del lato [VU] del triangolo. Ed è anche il perimetro del poligono [$AMDCBF$] minore dell'altro lato [UZ del triangolo E], poiché è [minore] anche del perimetro del cerchio (*Sulla sfera e il cilindro*,





PROPOSIZIONE 1, [1] pag. 80): dunque il poligono è minore del triangolo E, ciò che è impossibile.

Sia ora il cerchio, se possibile, minore del triangolo E, e si circoscriva [ad esso] il quadrato, e si dividano [successivamente] per metà gli archi della circonferenza, e si conducano [rette] tangenti per i punti [di divisione]: dunque l'angolo PAR è retto. La PR è dunque maggiore della MR: infatti la RM è uguale alla RA; e il triangolo RPQ è maggiore della metà della figura $PFAM$. Si lascino [segmenti circolari] simili a quello QFA minori dell'eccesso di cui il [triangolo] E supera il cerchio $ABCD$: dunque ancora il poligono circoscritto è minore di E, ciò che è impossibile: è infatti maggiore, poiché la NA è uguale all'altezza [VU] del triangolo, e il perimetro è maggiore della base [UZ] del triangolo.

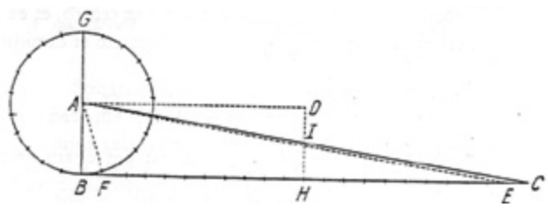
Dunque il cerchio è uguale al triangolo E.

Commento alla dimostrazione

La dimostrazione della PROPOSIZIONE 2 di *Misura del cerchio* richiama i risultati della proposizione precedente, sulla quale concentreremo le nostre osservazioni. Si può osservare come la sua dimostrazione costituisca un tipico esempio del classico metodo di esaustione. Si procede per assurdo, dimostrando l'impossibilità che il cerchio sia maggiore del triangolo, e poi che sia minore di esso. Da ciò si deduce l'uguaglianza tra le due figure considerate. Considerando il cerchio maggiore del triangolo, l'avvicinamento indefinito si ottiene con le aree di poligoni inscritti nel cerchio, partendo dal quadrato e poi raddoppiando di volta in volta il numero dei lati del poligono fino ad avere un residuo minore della differenza tra il cerchio e il triangolo. Il poligono inscritto ha perimetro minore della circonferenza e apotema minore del raggio, dunque non può essere maggiore del triangolo. Analoghe osservazioni si possono fare considerando poligoni circoscritti nel caso del cerchio supposto minore del triangolo. La PROPOSIZIONE 2 utilizza costruzioni molto semplici: un triangolo equivalente al cerchio e triangoli aventi uguale altezza.

TEOREMA 2 *Stereometria archimedea*, Keplero
L'area del cerchio sta al quadrato del diametro come 11 sta a 14.

Si consideri la circonferenza di diametro BG. Essa ha tante porzioni quanti



sono i punti, considerati infiniti, ciascuna delle quali viene considerata come base di un triangolo, di altezza AB. Siccome i triangoli contenuti nell'area del cerchio sono infiniti, lo sono anche i triangoli considerati, aventi vertice in A.

Si rettifichi la circonferenza BG e sia BC il segmento ottenuto, e sia perpendicolare ad AB. Dunque le basi di tutti quegli infiniti triangoli, o settori, saranno rappresentate su una retta BC, ordinate una a fianco all'altra. Sia BF una di queste basi, piccola quanto si voglia, e sia CE uguale ad essa. Si uniscano i punti F, E, C al centro A. Dato che i triangoli ABF e AEC costruiti sulla retta BC sono tanti quanti sono i settori nell'area del cerchio, e hanno basi BF, EC e altezza comune BA uguali a quelle dei settori nel cerchio, dunque i triangoli EAC e BAF saranno uguali, e saranno equivalenti ciascuno ad un settore circolare. Avendo tutti le basi sul segmento BC, il triangolo BAC risultante dalla somma di questi triangoli sarà equivalente alla somma di tutti i settori del cerchio, cioè all'area del cerchio che essi costituiscono.

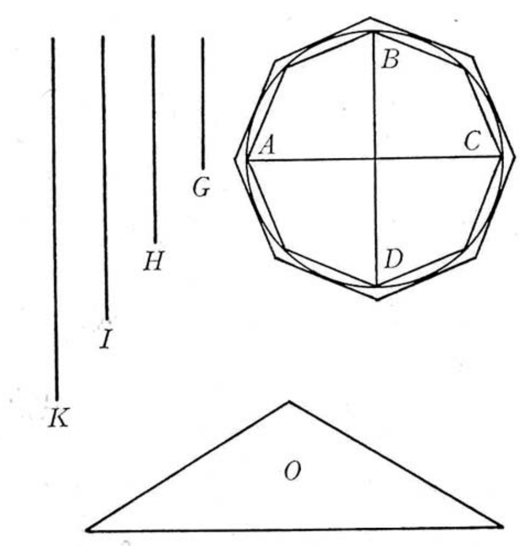
Il punto H dunque divida a metà BC, sia $ABHD$ un parallelogramma, e sia I il punto in cui DH interseca AC. L'area di questo rettangolo sarà uguale all'area del cerchio. Infatti come CH è la metà di CB, così IH è la metà di DH, che corrisponde ad AB. Dunque HI è equivalente a ID, HC è equivalente a DA, a sua volta uguale a HB; poiché gli angoli opposti al vertice in I sono uguali e gli angoli in D e H sono retti, dunque il triangolo ICH, che è esterno al parallelogramma, è uguale al triangolo IAD, che è la parte che completa il parallelogramma.

Se si suppone il diametro GB diviso in 7 parti, il quadrato costruito su di esso sarà suddiviso in 49 parti. E se la circonferenza fosse divisa in 22 parti [vedi teorema 1: il rapporto tra circonferenza e diametro è vicino al rapporto tra 22 e 7] così sarebbe per BC, quindi la sua metà, il segmento BH, risulterebbe diviso in 11 parti, o poco meno [per l'irrazionalità di π]. Dunque il raggio, AB, risulterebbe composto da tre parti e mezzo e di conseguenza il rettangolo AH sarebbe composto da 38 parti e mezzo. Avendo diviso il quadrato costruito sul diametro in 49 parti, l'area del cerchio risulta composta da 38 parti e mezzo. Moltiplicando per due e dividendo per sette si ottiene che il rapporto tra le due aree è come 14 sta a 11.

Commento alla dimostrazione

A differenza di Archimede, il quale utilizza un procedimento finito per avvicinare le aree dei poligoni a quella del triangolo, Keplero presenta fin dai primi teoremi la grande novità del suo metodo. Introduce infatti per la prima volta il termine *infinità*. Si riferisce in questo caso al numero di triangoli contenuti nel cerchio. Keplero infatti considera la circonferenza come una spezzata composta da infiniti lati infinitesimi e di conseguenza il cerchio come formato da infiniti triangolini, aventi come base uno dei lati e come altezza il raggio. Una buona approssimazione del cerchio è data dal triangolo ottenuto rettificando la circonferenza e mantenendo il raggio come altezza. Keplero mostra come essi siano costituiti dallo stesso numero di triangolini, tutti uguali tra loro. A questo punto si suppone il diametro diviso in 7 parti, e quindi la circonferenza in 22, per il TEOREMA 1 ([2] pagg. 13-15), e quindi semplicemente si considera il rapporto tra il numero di parti in cui è suddiviso il quadrato costruito sul diametro ($7 \cdot 7 = 49$) e quelle in cui è suddivisa l'area del triangolo ($3,5 * 22/2 = 38$).

PROPOSIZIONE 34 *Sulla sfera e il cilindro*, Archimede
Ogni sfera è quadrupla del cono avente base uguale al cerchio massimo della sfera, e per altezza il raggio della sfera.



Sia una sfera qualunque, e in essa sia circolo massimo quello $ABCD$. Se dunque la sfera non è quadrupla del cono suddetto, sia, se possibile, maggiore del quadruplo. Sia il cono O avente base quadrupla del cerchio $ABCD$, e altezza uguale al raggio della sfera: dunque la sfera è [supposta] maggiore del cono O. Vi saranno [dunque] due grandezze disuguali: la sfera e il cono: è possibile prendere due rette disuguali, tali che la maggiore abbia, rispetto alla minore, rapporto minore di quello che la sfera ha rispetto al cono O (I,2, [1] pagg. 80-83). Siano [queste] le rette K, G e si prendano le [rette] I, H che ugualmente si superino scambievolmente: K rispetto ad I, e I rispetto ad H, e H rispetto a G. E si immagini nel cerchio $ABCD$ inscritto un poligono, il numero dei lati del quale sia divisibile per quattro, e circoscritto un altro simile all'inscritto, come [abbiamo già considerato] precedentemente. E il lato del poligono circoscritto abbia rispetto al [lato] del poligono inscritto rapporto minore di quello che K ha con I (I,3, [1] pagg. 83-85), e siano AC, BD diametri perpendicolari tra loro.

Se dunque, [fermo] restando il diametro AC, ruota il piano nel quale sono i poligoni, si avranno [due] figure: quella inscritta nella sfera e quella circoscritta, e la [figura] circoscritta avrà rispetto alla [figura] inscritta rapporto triplicato di quello che il lato del [poligono] circoscritto ha rispetto a quello del [poligono] inscritto nel cerchio $ABCD$ (I,32, [1] pagg. 148-151). E il lato ha rispetto al lato rapporto minore di quello che K ha con I: cosicché la figura circoscritta ha [rispetto alla figura inscritta] rapporto minore di quello triplicato [del rapporto] di K ad I.

Ma K ha rispetto a G rapporto maggiore di quello triplicato [del rapporto] di K ad I: dunque la [figura] circoscritta ha rispetto alla [figura] inscritta rapporto molto minore di quello che K ha con G. E K ha con G rapporto minore di quello che la sfera ha rispetto al cono O (come s'è supposto), e permutando si ottiene ciò che è impossibile: infatti la figura circoscritta è maggiore della sfera, mentre quella inscritta è minore del cono. La sfera non è dunque maggiore del quadruplo del cono suddetto.

Sia, se possibile, minore del quadruplo, cosicché la sfera sia minore del cono O. Si prendano le rette K, G tali che K sia maggiore di G e che abbia rispetto alla stessa rapporto minore di quello che il cono O ha rispetto alla sfera (I,2). E si pongano le [rette] H, I come [è stato fatto] prima, e si immagini un poligono inscritto nel cerchio $ABCD$, ed uno circoscritto, in modo che il lato del [poligono] circoscritto abbia rispetto al lato del [poligono] inscritto rapporto minore di quello che K ha rispetto ad I (I,3): e vengano eseguite le altre costruzioni nello stesso modo prima veduto: dunque la figura solida circoscritta avrà rispetto a quella inscritta rapporto triplicato di quello che il lato del [poligono] circoscritto al cerchio $ABCD$ ha rispetto al lato del [poligono] inscritto (I,32). Ma il lato ha rispetto al lato rapporto minore di quello di K ad I: dunque la figura circoscritta avrà, rispetto alla [figura] inscritta, rapporto minore del [rapporto] triplicato di quello che K ha con I.

Ma la [retta] K ha rispetto alla G rapporto maggiore del [rapporto] triplicato di quello che K ha con I: cosicché la figura circoscritta ha rispetto alla [figura] inscritta rapporto minore di quello che K ha con G. Quindi K ha con G rapporto minore di quello che il cono O ha rispetto alla sfera, ciò che è impossibile: infatti la figura inscritta è minore della sfera mentre quella circoscritta è maggiore del cono O (I, 31, corollario [1] pag. 148).

Dunque la sfera non è neppure minore del quadruplo del cono avente base uguale al cerchio $ABCD$, e altezza uguale al raggio della sfera. E fu dimostrato che non è neppure maggiore: dunque è quadrupla.

Corollario ([1] pag. 159)
Dimostrate queste cose, è evidente che ogni cilindro avente per base il circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera, e la sua superficie, comprese le basi, è una volta e mezza la superficie della sfera.

Infatti il cilindro suddetto è sestuplo del cono avente la stessa base e l'altezza uguale al raggio [della sfera]: la sfera, poi, s'è dimostrato essere quadrupla dello stesso cono (I,34, [1] pagg. 155-159): è dunque evidente che il cilindro è una volta e mezza la sfera. Di nuovo, poiché la superficie del cilindro, eccetto le basi, si dimostra essere uguale al cerchio, il raggio del quale è medio proporzionale tra il lato del cilindro e il diametro della base (I,13, [1] pagg. 107-113), [e poiché] il lato del suddetto cilindro, circoscritto alla sfera è uguale al diametro della base: e il cerchio avente il raggio uguale al diametro della base è quadruplo della base, vale a dire del circolo massimo della sfera, dunque la superficie del cilindro, eccetto le basi, sarà quadrupla del circolo massimo, e tutta la superficie del cilindro insieme con le basi sarà sestupla del circolo massimo. Ma la superficie della sfera è quadrupla del circolo massimo (I,33, [1] pagg. 152-155): dunque la superficie totale del cilindro è una volta e mezza la superficie della sfera.

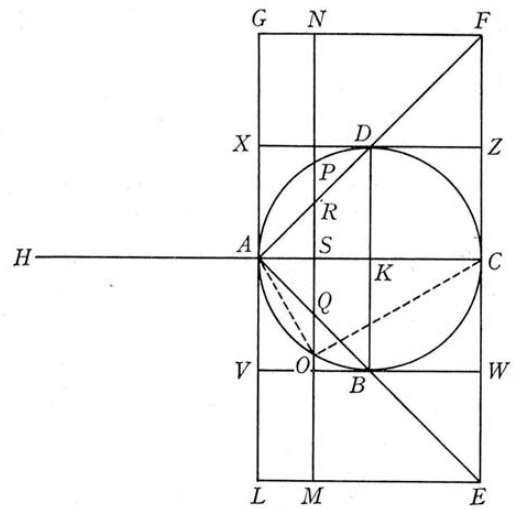
Commento alla dimostrazione

Il primo libro di *Sulla sfera ed il cilindro* conta 44 proposizioni, tuttavia è nelle proposizioni 33 e 34 che trova i suoi risultati più importanti. Questi due teoremi riguardano il rapporto tra la superficie della sfera ed il suo circolo massimo e quello tra il volume della sfera e quello del cono. Ci soffermiamo sul secondo di essi. Usando un suo tipico procedimento, per dimostrare che la sfera è il quadruplo del cono indicato Archimede dimostra l'uguaglianza tra la stessa sfera ed un cono che è il quadruplo del cono iniziale, ottenuto quadruplicando l'area di base. Si utilizzano presupposti presentati in proposizioni precedenti, ad esempio la PROPOSIZIONE I,2, della cui importanza abbiamo già parlato, e la I,3, che riguarda la possibilità di inscrivere e circoscrivere ad un cerchio due poligoni regolari simili che abbiano tra di loro rapporto minore di uno dato.

Anche il questo caso viene applicato il metodo di esaustione, raggiungendo l'assurdo prima supponendo la sfera maggiore del cono e poi il contrario. Il rapporto tra i volumi viene minorato dal rapporto tra due segmenti, possibilità assicurata dalla I,2 , quindi nel cerchio massimo della sfera si considera un poligono inscritto e uno simile circoscritto, e si considera un altro segmento in modo che il suo rapporto con uno dei precedenti sia maggiore del rapporto tra i lati dei due poligoni. Facendo ruotare cerchio e poligoni attorno ad un diametro si ottengono la sfera e due solidi, uno inscritto ed uno circoscritto, i cui volumi avranno lo stesso rapporto che hanno tra loro i cubi dei lati dei poligoni corrispondenti, come afferma la PROPOSIZIONE I,32. L'assurdo viene raggiunto sui rapporti tra i segmenti: per la loro costruzione si arriva ad avere il rapporto tra i due solidi di rotazione minore del rapporto tra sfera e cono confrontandoli con il rapporto tra i vari segmenti, mentre la PROPOSIZIONE I,27 ([1] pagg. 142-143) assicura che il volume del solido inscritto ad una sfera costituito da parti coniche è minore del cono di volume quadruplo considerato, e ovviamente il volume del solido circoscritto è maggiore di quello della sfera .

Nel corollario alla PROPOSIZIONE I,34 attraverso semplici passaggi si ottiene che il volume del cilindro avente come base il cerchio massimo della sfera e come altezza il suo diametro ha volume uguale ai 3/2 del volume della sfera.

PROPOSIZIONE 2 *Metodo*, Archimede ([1] pagg. 579-584)
Ciò dunque non è stato [veramente] dimostrato per mezzo di quel che è stato detto; ma è stata fornita una indicazione che [induce a ritenere che] la conclusione sia vera: perciò noi, vedendo che la conclusione non è stata dimostrata, ma presumendo che essa sia vera, proporremo la dimostrazione per via geometrica da noi stessi trovata, che avevamo già prima pubblicata.
Che qualunque sfera è quadrupla del cono avente la base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera; e che il cilindro avente base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera, si vede nel modo seguente.



Sia infatti una sfera nella quale circolo massimo [sia] quello $ABCD$, e [siano] i diametri perpendicolari tra loro le AC, BD, e sia un cerchio nella sfera avente la BD [come] diametro [e situato in un piano] perpendicolare al [piano del] cerchio $ABCD$; e su questo cerchio perpendicolare [come base] si costruisca un cono avente il vertice nel punto A: ed estesa la sua superficie si seghi il cono con un piano per il [punto] C parallelo alla base: si avrà così un cerchio [situato in un piano] perpendicolare alla AC, e il suo diametro sarà la EF. [A partire] da questo cerchio [come base] si costruisca un cilindro avente l'asse uguale alla AC, e i lati del cilindro siano le EL, FG. E si prolunghi la CA e si ponga la AH uguale ad essa, e si immagini la leva CH, il [punto di] mezzo della quale è A, e si conduca una retta parallela alla BD: [sia] la MN, ed essa seghi il cerchio $ABCD$ nei [punti] O, P, il diametro AC nel [punto] S, la retta AE nel [punto] Q, la AF nel [punto] R; e per la retta MN si conduca un piano perpendicolare alla AC; questo formerà nel cilindro come sezione un cerchio il diametro del quale sarà la MN, e nel cono AEF [formerà] un cerchio il diametro del quale sarà la QR.

E poiché il [rettangolo] di AC, AS è uguale al [rettangolo] di MS, SQ (infatti la AC è uguale alla SM e la AS [è uguale] alla SQ) e inoltre:

rett. $(AC, AS) = q(AO) = q(OS) + q(SQ)$
dunque: rett. $(MS, SQ) = q(OS) + q(SQ)$.
E poiché: $AC : AS = MS : SQ$ e: $AC = AH$ sarà: $AH : AS = MS : SQ$
vale a dire: $= q(MS) : rett.(MS, SQ)$.
Ma è stato dimostrato che: rett. $(MS, SQ) = q(OS) + q(SQ)$;
dunque: $AH : AS = q(MS) : [q(OS) + q(SQ)]$.
Ma: $q(MS) : [q(OS) + q(SQ)] = q(MN) : [q(OP) + q(QR)]$
così nello stesso rapporto il cerchio nel cilindro, il diametro del quale è la MN, sta al [la somma de]i cerchi: quello del cono, il cui diametro è QR, e quello nella sfera, il cui diametro è OP *(Euclide, XII, 2)*.

Dunque come AH sta ad AS così il cerchio nel cilindro sta al [la somma de]i cerchi nella sfera e nel cono. Poiché dunque come AH sta ad AS così lo stesso cerchio nel cilindro, rimanendo dov'è, sta rispetto al [la somma di] ambedue i cerchi, i diametri dei quali sono le [rette] OP, QR, trasportati questi e posti intorno ad H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H, essi si faranno equilibrio rispetto al punto A [come fulcro]. Similmente si dimostrerà che se nel parallelogrammo LF si conduce un'altra [retta] parallela alla EF, e per la [retta] tracciata si conduce un piano perpendicolare alla AC, il cerchio generato nel cilindro restando dov'è farà equilibrio rispetto al punto A [come fulcro] ad ambedue i cerchi: quello generato nella sfera e quello nel cono, trasportati e collocati sulla leva col punto H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H.

Riempito (...) dunque il cilindro dai cerchi [così] assunti e [similmente] la sfera e il cono, il cilindro restando dov'è farà equilibrio [con fulcro] nel punto A ad ambedue [i solidi]: la sfera e il cono trasportati e collocati sulla leva nel [punto] H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H.

Poiché dunque i solidi suddetti si fanno equilibrio nel punto A [come fulcro], il cilindro rimanendo [dov'è] intorno al centro di gravità K (lemma VIII), la sfera e il cono trasportati intorno al centro di gravità H, sarà:

$$AH : AK = \text{cilindro} : (\text{sfera} + \text{cono}).$$

Dunque il cilindro è doppio [della somma] della sfera e del cono. Ma è triplo dello stesso cono: dunque tre coni sono uguali a due coni e a due sfere. Si sottraggano i due coni che sono in comune: dunque un cono avente il triangolo AEF [come sezione con un piano passante] per l'asse è uguale alle due sfere suddette (= al doppio della sfera suddetta).

Ma il cono il cui triangolo per l'asse è AEF è uguale a otto coni il cui triangolo per l'asse sia quello ABD, poiché la EF è doppia della BD *(Euclide, XII, 12)*. Dunque gli otto coni suddetti sono uguali a due sfere. Quindi la sfera, della quale il circolo massimo è quello $ABCD$, è quadruplo del cono, il vertice del quale è il punto A, e la base [del quale] è il cerchio tracciato intorno al diametro BD [in un piano] perpendicolare alla AC.

Si conducano ora per i punti B, D nel parallelogrammo LF le parallele VBW, XDZ e si immagini il cilindro, le basi del quale [siano] i cerchi aventi i diametri VX, WZ, e il cui asse sia AC. Poiché dunque il cilindro del quale il parallelogrammo per l'asse è quello VZ è doppio del cilindro il cui parallelogrammo per l'asse è quello VD *(Euclide, XII, 14)* e questo è triplo del cono il cui triangolo per l'asse è quello ABD, come [è mostrato] negli Elementi *(Euclide, XII, 10)*: (...) il cilindro del quale il parallelogrammo per l'asse è quello

VZ è sestuplo del cono il cui triangolo per l'asse è quello ABD. Ma è stato dimostrato che la sfera il cui circolo massimo è quello $ABCD$ è quadrupla dello stesso cono: dunque il cilindro è una volta e mezza la sfera: ciò che si doveva dimostrare.

Veduto ciò: che qualunque sfera è quadrupla del cono avente per base il cerchio massimo e altezza uguale al raggio della sfera, [mi] venne l'idea che la superficie di qualunque sfera sia quadrupla del cerchio massimo della sfera: la supposizione consisteva [nel ritenere] che come qualunque cerchio è uguale ad un triangolo avente per base la circonferenza del cerchio e l'altezza uguale al raggio del cerchio, così qualunque sfera sia uguale al cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.

Commento alla dimostrazione

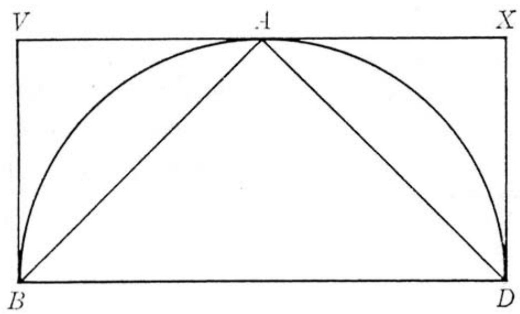


Figura tratta da [1] pag. 24

La proposizione precedente si ritrova nella seconda proposizione del *Metodo*, ma è dimostrata attraverso considerazioni di carattere infinitesimale, come tutte le proposizioni trattate in questa opera, a cui Archimede non assegna valore dimostrativo assoluto. L'intuizione su cui Archimede si basa per elaborare questa proposizione è la seguente: la semisfera è intermedia tra cono e cilindro aventi il circolo massimo per base ed il raggio della sfera come altezza. Il rapporto tra i volumi di cono e cilindro è 1/3. Archimede ipotizza che la semisfera sia il doppio del cono e dunque i 2/3 del cilindro, ottenendo per intuizione un risultato esatto (e infatti è a noi noto che sfera $= 4/3\pi r^3 = 4/3$ cilindro).

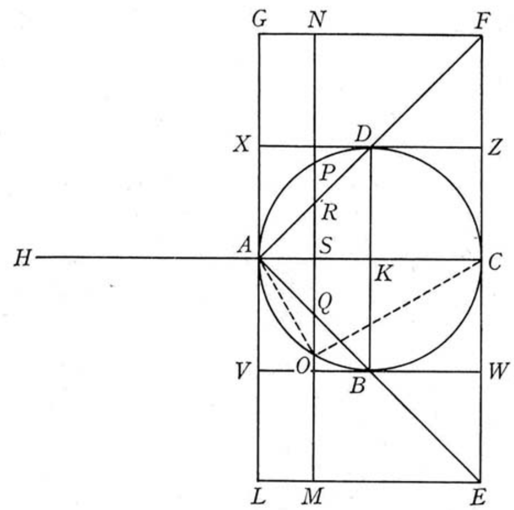
Il cilindro considerato nell'intuizione viene usato come seconda figura per poter applicare il metodo meccanico. La prima figura è invece composta dall'insieme del cono e dalla sfera:

L'immagine presenta una sezione dei solidi considerati per mezzo di un piano per il diametro della sfera. La relazione da dimostrare è

$$\text{sfera } = 4 \text{ coni } ADB,$$

ma si mostrerà l'equivalente

$$\text{sfera } = 1/2 \text{ cono } AEF.$$



Infatti il cono AEF ha altezza doppia e raggio di base doppio, quindi è otto volte il cono ADB.

Con le considerazioni meccaniche si vuole dimostrare che

$$\text{cono } AEF + \text{ sfera } = 3/2 \text{ cono } AEF = 1/2 \text{ cilindro } EFGL.$$

Il cilindro $EFGL$ ha infatti stessa base e stessa altezza del cono di sezione AEF.

Nella figura Archimede ha tracciato il prolungamento del diametro AC della sfera, AH, uguale al diametro stesso, e seziona inoltre i solidi con uno stesso piano, la cui traccia è MN, perpendicolare al diametro AC. Si considera la leva HS con fulcro in A, S determinato dal piano secante considerato di volta in volta. La legge di equilibrio della leva il cerchio sezione del cilindro lasciato dov'è farà equilibrio alla somma dei due cerchi sezioni del cono e della sfera trasportati con il loro centro nel punto H. Ciò vale per qualunque piano perpendicolare al diametro AC. Archimede suppone che i solidi vengano riempiti da tutti questi infiniti cerchi. Il peso del cilindro viene considerato come concentrato nel suo baricentro K mentre sfera e cono vengono dunque presi nel punto H. Per l'equilibrio della leva vale la proporzione:

$$AH : AK = \text{cilindro} : (\text{cono} + \text{sfera}).$$

Siccome il cilindro è omogeneo, il suo baricentro cade nel centro della sfera, e dunque $AK = 1/2\ AC$. Il rapporto tra i solidi diventa dunque:

$$\text{cilindro} = 2\ (\text{cono} + \text{sfera})$$

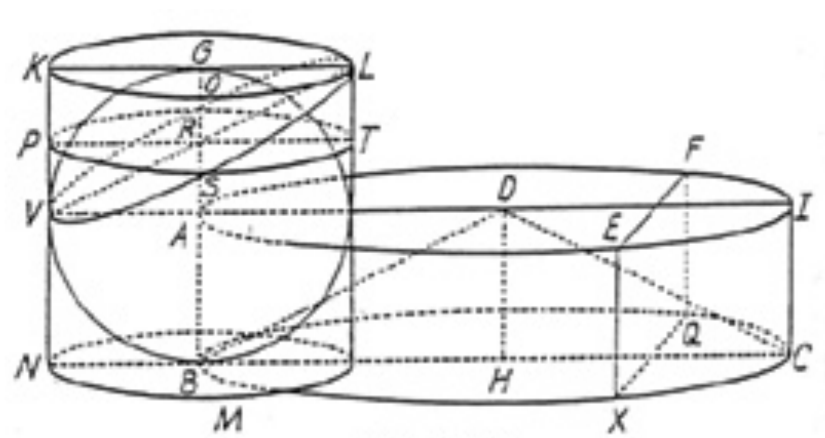
Rileggendo al contrario il procedimento di costruzione della figura si ottiene la tesi, cioè l'uguaglianza tra il volume della sfera e il quadruplo del cono avente sezione ABD, cioè avente base uguale al circolo massimo della sfera e altezza uguale al suo raggio.

TEOREMA 13 *Stereometria archimedea*, Keplero
Si consideri il cono avente altezza uguale al diametro di una sfera e come base il cerchio massimo della sfera. Il volume del cono considerato risulta essere la metà di quello della sfera.

Dal TEOREMA 4 ([2] pagg. 17-19), il volume del cilindro è il triplo del volume del cono avente stessa base e altezza. Allo stesso modo, dal TEOREMA 11, il rapporto tra i volumi del cilindro e della sfera inscritta è 3/2. Ne risulta la tesi.

Per completezza, riportiamo il teorema richiamato:

TEOREMA 11 *Stereometria archimedea*, Keplero ([2] pagg. 23-25)
Il rapporto tra i volumi del cilindro e della sfera inscritta è uguale a 3/2.



Schema VIII

Infatti il volume della sfera, in analogia con quanto detto per il TEOREMA 2 ([2] pagg. 15-16), contiene per così dire infiniti coni, con vertice nel centro della sfera e basi che stanno sulla superficie, che si possono paragonare ai punti nel caso del cerchio.

Sia dunque nel disegno relativo al TEOREMA 2 BG la sfera di centro A, AB e AG coni aventi base rappresentata dai punti B e G e vertice comune A. I coni di questo tipo sono infiniti e possono essere piccoli a piacere.

Nel nuovo disegno la superficie della sfera è resa in piano dalla superficie di un cerchio di diametro BC, doppio del diametro della sfera BG, poiché il rapporto tra l'area del cerchio massimo della sfera e del cerchio costruito è 1/4 (TEOREMA 2, dipendenza area dal quadrato del diametro), e per il TEOREMA 6 ([2] pag. 20) la superficie della sfera è il quadruplo del cerchio massimo. Sia H il centro del cerchio di diametro BC. Sia HD perpendicolare ad esso e uguale al raggio AB della sfera.

Si consideri il cono BDC di base il cerchio BC e vertice D: avrà volume uguale al volume della sfera BG. Le basi, prese piccole quanto si voglia, di tutti gli infiniti coni contenuti nella sfera vengono ordinate una a fianco dell'altra, mentre la superficie sferica a cui appartengono viene resa in piano. Per il fatto che i coni ABB, AGG erano retti nella sfera, e sono stati resi come coni scaleni DCC, DBB, ad eccezione del cono medio DHH, che rimane retto, e hanno tutti la stessa altezza DH e basi uguali, piccole quanto si vuole, tutti dunque sono uguali sia tra di loro che ai coni retti della sfera; il cono BDC, composto da tutti questi, sarà equivalente all'intera sfera BG, la somma di tutti i coni retti corrispondenti.

Si consideri il cilindro che ha per base il cerchio BC e altezza DH, $AICB$, il cui volume è il triplo del volume del cono BCD per il TEOREMA 4. Il suo volume è il doppio del volume del cilindro che contiene la sfera, poiché la base BC è quadrupla della base KL, mentre l'altezza HD è la metà dell'altezza BG. Infatti sovrapponendo due cilindri $AICB$ si ottiene un'altezza uguale all'altezza BG del cilindro KLB, ed essi sono il quadruplo di KLB, poiché la base BC è quadrupla della base KL: dunque un cilindro $AIBC$ è il doppio del cilindro KLB. Era inoltre il triplo del cono BDC, che è il volume della sfera BG. Dunque dividendo il cilindro $AICB$ in 6 parti, dalla metà di queste, ovvero 3 parti, si ottiene il cilindro KLB, invece da un terzo di queste 6, ovvero 2 parti, si ottiene la sfera GB. Dunque il cilindro KLB sta alla sfera in esso inscritta, GB, come 3 sta a 2.

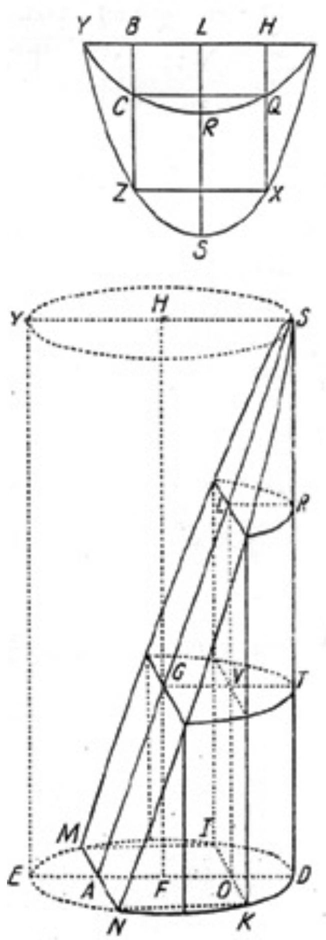
Commento alla dimostrazione

Il corrispondente teorema di Keplero deriva direttamente da risultati ottenuti nei teoremi 4 e 11. Mostriamo come esplicativo il TEOREMA 11. Si ha un'analogia esplicita con il TEOREMA 2: la sfera viene considerata come costituita da infiniti coni retti aventi vertice nel centro della sfera, le cui basi sono piccole a piacere sulla superficie della sfera. Quest'ultima viene resa in piano mediante un cerchio BC quadruplo del cerchio massimo. Il cono BDC avente altezza uguale al raggio della sfera ed esso per base è considerato equivalente alla sfera, perché costituito dagli stessi coni che la compongono. La tesi si ottiene confrontando il volume del cono e quello del cilindro $AIBC$ avente le sue stesse dimensioni, e il volume di quest'ultimo con quello del cilindro KLN circoscritto alla sfera.

3.4 Teorema illustrativo dal *Supplementum ad Archimedem*

Nella seconda parte dell'opera di Keplero considerata si trovano teoremi riguardanti solidi di rotazione che applicano metodi dimostrativi diversi rispetto a quelli utilizzati nella *Stereometria Archimedea*. Ne viene ora presentato uno tra i più significativi.

TEOREMA 22 *Supplementum ad Archimedem*, Keplero ([2] pagg. 52-54) *La zona di un cedro troncato da entrambe le parti da due cerchi uguali è composto dal volume del cedro minore creato dallo stesso segmento circolare che dà luogo alla parte esterna della zona e dal volume del segmento di cilindro la cui base maggiore è il segmento circolare che genera il cedro escluse le parti tolte e la cui base minore è il segmento circolare che genera il cedro minore, di altezza uguale alla circonferenza troncante.*



Schema XIV

Si riprende lo schema XIV. Si consideri in esso il segmento cilindrico LSR, equivalente al cedro maggiore. Si mostra questo segmento a parte, per osservare la figura che viene ruotata per formare il cedro maggiore, che viene troncato da entrambe le parti. Questo segmento circolare è rappresentato dal segmento $YBLH$ e dall'arco $YCRQ$. Si tronchi questo cedro da entrambe le parti (il quale nello schema XVIII ([2] pag. 73) è rappresentato da $EAHFSQCG$) così risulta evidente che non è creato dall'intero segmento circolare, ma dalla sua parte interna $BCQH$ e dall'arco CRQ ruotati attorno all'asse BH. I segmenti

BC, HQ rappresenteranno dunque i raggi delle circonferenze troncanti, la base sarà tagliata in quattro parti.

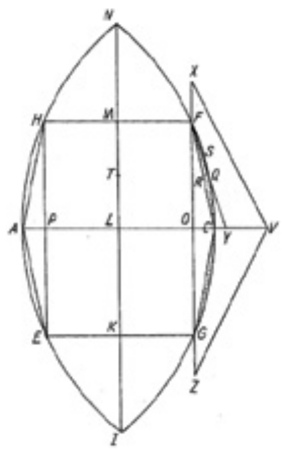
1. BCY da una parte, triangolo mistilineo
2. HQ dall'altra parte, simile al precedente
3. $BHQC$ parallelogramma rettangolo al centro
4. Il segmento circolare minore compreso tra il segmento CQ e l'arco CRQ davanti

Per avere un solido equivalente a tutto il cedro maggiore l'altezza del solido RS sarà uguale alla lunghezza della circonferenza tracciata dal punto medio segmento circolare R attorno all'asse di rotazione del cedro. Il piano a cui appartengono le ipotenuse dei triangoli rettangoli BCZ e LRS è lo stesso YSH: da cui come LR sta a RS, così BC sta a CZ. Ma LR sta a RS come il raggio della circonferenza sta alla circonferenza stessa, dunque BC sta a CZ nello stesso rapporto. Dunque siccome BC è il raggio della circonferenza troncante, CZ sarà la circonferenza troncante.

Dunque quattro sono i solidi che hanno come base le parti prima elencate:

1. sopra BCY si trova la piramide $BYCZ$, delimitata da superfici e spigoli misti
2. a fianco di HQX un solido simile. Si tratta delle due punte del cedro che vengono tagliate (nello schema XVIII a questi solidi spettano le lettere GEI e FNH)
3. sopra $BHQC$ si trova il prisma o pentaedro $BCZXHQ$, che è delimitato da tre quadrilateri $BCQH$, $CQXZ$, $XZBH$, e da due triangoli CZB, QXH; l'altezza del quale è CZ, tra gli spigoli QC, XZ paralleli. Questo solido è equivalente al cilindro al centro del cedro troncato, avente come basi le circonferenze troncanti (questo cilindro nello schema XVIII è indicato dalle lettere $EHFG$, compreso tra FCG e HAE)
4. infine sopra il piccolo segmento CQR si trova il solido $SRQCZSX$, simile a quello in cui si sviluppava la zona della mela. Mentre tutto il solido $HYSR$ equivale a tutto il volume del cedro, e tre parti considerate equivalgono ad altrettante parti del cedro, anche quest'ultima, segmento cilindrico, è necessario che equivalga alla rimanente parte del cedro. È infatti la zona del cedro troncato che circonda il cilindro già menzionato.

Come questo solido è simile a quello che prima equivaleva alla zona della mela, così anche questa parte ha due componenti ben distinte: una è il segmento cilindrico retto compreso tra quattro superfici: il parallelogramma piano $CQXZ$, la superficie cilindrica $XZCRQ$, e due piccoli segmenti circolari, dei quali uno è rappresentato dalle lettere QCR, l'altro, all'altezza di XZ, non appare in figura. L'altezza di questo segmento, CZ, come è già stato dimostrato, equivale alla circonferenza troncante. L'altra componente di questa parte è il prisma ZXS, che sta sullo stesso piccolo segmento circolare all'altezza di ZX. Diciamo inoltre che LR sta a RS come il raggio sta alla circonferenza; e così stanno tra loro anche BC e CZ; questo sarà anche il rapporto tra la differenza di LR e BC e la differenza di RS e CZ, che è l'altezza di questa seconda componente della parte considerata. Ma la differenza tra LR e BC è l'altezza del segmento circolare CQR (nello schema XVIII è AP, che è il raggio del limone minore, che l'arco HAE descrive attorno all'asse HE). Dunque anche la differenza tra RS e CZ, che è l'altezza del prisma cilindrico, è uguale alla circonferenza che descrive il punto medio R' del segmento circolare del cedro minore. Dunque attraverso questi, che nel teorema precedente abbiamo chiamato prismi, questo prisma cilindrico ZXS è equivalente al cedro minore, descritto dal segmento minore CQR (nello schema XVIII HAE). E dunque la zona del cedro troncato si può suddividere nelle due parti che abbiamo descritto nel teorema. Il volume del cedro troncato è costituito da tre elementi in tutto: il cedro minore, il cilindro e il segmento retto del cilindro.



Schema XVIII

Commento alla dimostrazione

Per comprendere il modo in cui il metodo a buccia è applicato al TEOREMA 22, appartenente alla sezione *Supplementum ad Archimedem* di Keplero, osserviamo l'immagine a pagina seguente.

Il segmento cilindrico $YRY'S$ rappresentato è costruito sul segmento circolare YRY' che genera il cedro e ha altezza equivalente alla circonferenza descritta durante la rotazione dal punto medio del segmento circolare, R. Esso è dunque equivalente al cedro iniziale.

Si possono osservare i due solidi la cui somma per il teorema è equivalente alla zona del cedro: il piccolo cedro, che corrisponde al segmento cilindrico $ZXR'S$, ed il segmento di cilindro, che è quello di base $BCRQH$ e di altezza RR', con base superiore ZXR'. Infatti la loro somma differisce dal segmento cilindrico $YRY'S$ per le due piramidi mistilinee $YBCZ$ e $Y'HQX$ che corrispondono alla parte tagliata del cedro. Esse hanno infatti per base i triangoli mistilinei YBC e $Y'HQ$ che generano tali solidi per rotazione e hanno come altezza CZ, che ha lunghezza uguale alla circonferenza troncante.

Nella dimostrazione del teorema si susseguono considerazioni sugli elementi che compongono questo segmento cilindrico: si ha la differenziazione tra il cilindro interno al tronco di cedro, che corrisponde al prisma $BCZHQX$, e la parte esterna, corrispondente a $CRQXSZ$. Quest'ultima parte viene ulteriormente suddivisa nel segmento retto di cilindro $CRQXR'Z$ e nel segmento cilindrico $ZR'XS$ equivalente al cedro generato dalla rotazione di $ZR'X$ attorno a ZX. Il segmento di cilindro considerato dalla tesi è composto dal prisma $BCZHQX$ e dal segmento retto di cilindro $CRQXR'Z$.

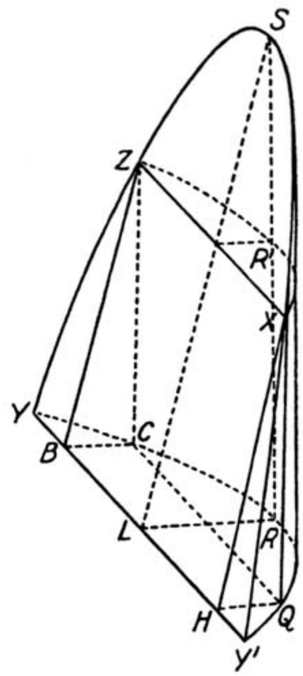


Figura tratta da [2] pag. 495

TEOREMA 25 *Supplementum ad Archimedem*, Keplero ([2] pagg. 62-63)
Il volume del segmento sferico sta al volume del cedro descritto dallo stesso segmento circolare come il semidiametro del segmento sferico sta alla sua altezza.

Keplero porta quattro dimostrazioni di questo teorema, che tuttavia non è corretto. Keplero si rifà spesso a idee intuitive, e questo è uno dei casi in cui esse hanno portato ad un risultato sbagliato. Keplero porta anche l'esempio numerico, considerandolo come indiscutibile. Nella dimostrazione numerica Keplero considera come al solito la suddivisione in piccole parti delle figure considerate. Si ferma però a 105, numero per cui la tesi non viene confutata. Guldino e altri matematici seguenti hanno dimostrato la non validità del teorema, ad esempio considerando 107 suddivisioni. Cavalieri sarà in grado di stabilire il rapporto esatto tra i volumi dei due solidi e di darne una dimostrazione rigorosa.

4 Supplementum ad Archimedem

4.1 Solidi di rotazione

I solidi che prenderemo in considerazione sono ottenuti dalla rotazione di coniche attorno ad un asse in particolari posizioni rispetto alla conica e al suo asse di simmetria.

Ad eccezione della circonferenza considereremo infatti assi di rotazione paralleli o perpendicolari all'asse di simmetria. Archimede aveva considerato soltanto i solidi ottenuti mediante la rotazione delle figure attorno al loro asse di simmetria (sfera, sferoide oblungo, sferoide schiacciato, conoide parabolico, conoide iperbolico). Attraverso la rotazione delle coniche attorno all'asse nelle diverse posizioni possibili, considerandolo parallelo o perpendicolare all'asse di simmetria si ottengono i solidi di rotazione trattati da Keplero nella sezione *Supplementum ad Archimedem* della *Nova Stereometria*. Oltre a questi Keplero elenca i solidi ottenuti dalla rotazione delle coniche attorno ad assi inclinati rispetto all'asse di simmetria e in posizioni diverse rispetto alla conica. Si raggiunge con questi un totale di 92 solidi.

Ci soffermeremo sulla descrizione dei primi 29 solidi, di cui mostriamo un'immagine ottenuta utilizzando il programma RotoSolid, versione 1.06 beta.

Riferimenti bibliografici: [2] pagg. 37-43.

Questa è la figura di riferimento per i solidi ottenuti dalla rotazione della circonferenza.

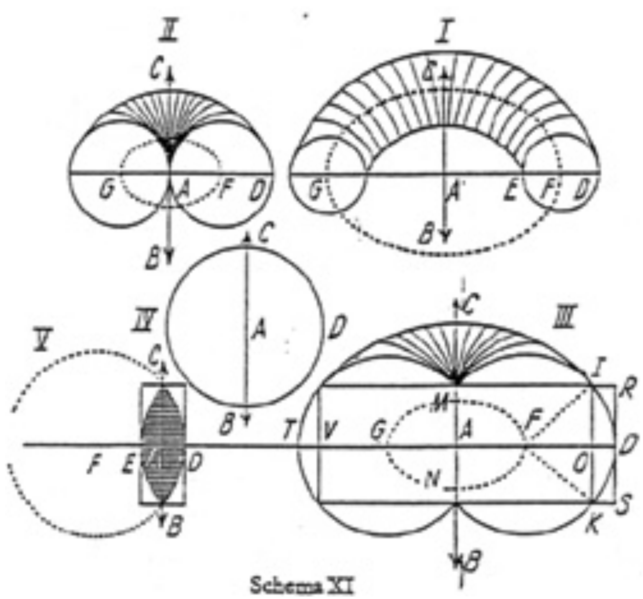


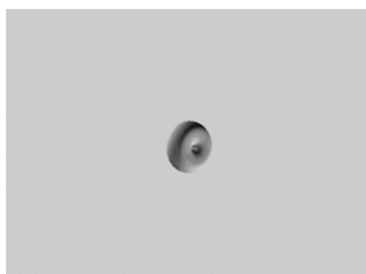
Figura tratta da [2] pag. 39

4.1.1 Circonferenza

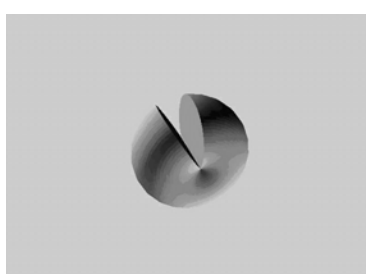
Sia CB l'asse attorno al quale viene fatta ruotare la circonferenza di centro F.

- Se l'asse è esterno alla figura, che viene fatta ruotare lungo la circonferenza sul piano perpendicolare all'asse CB e con raggio AF, A appartenente all'asse CB, si crea l'ANELLO APERTO di centro A.

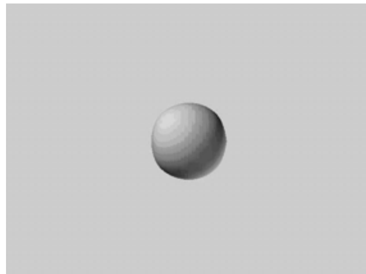
- Se l'asse è tangente alla figura in A con lo stesso tipo di rotazione si generano figure che si possono chiamare ANELLI CHIUSI.



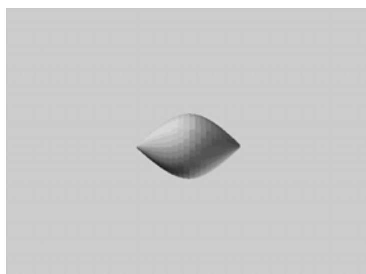
- Se l'asse seca la circonferenza generatrice fuori dal punto medio e se si ruota il segmento circolare maggiore MDN attorno alla corda MN si genera un solido con due cavità in corrispondenza dei due punti opposti M e N, che ha la forma di MELA.



- Se l'asse passa per il centro stesso della circonferenza e si fa ruotare CBD attorno al diametro CB si genera la SFERA.



- Se l'asse seca la circonferenza generatrice fuori dal punto medio e se si ruota il segmento circolare minore CDB attorno alla corda CB si genera un solido appuntito ai due estremi opposti C e B, che possiamo chiamare CEDRO.



Questa è la figura di riferimento per i solidi generati dalla rotazione delle altre coniche.

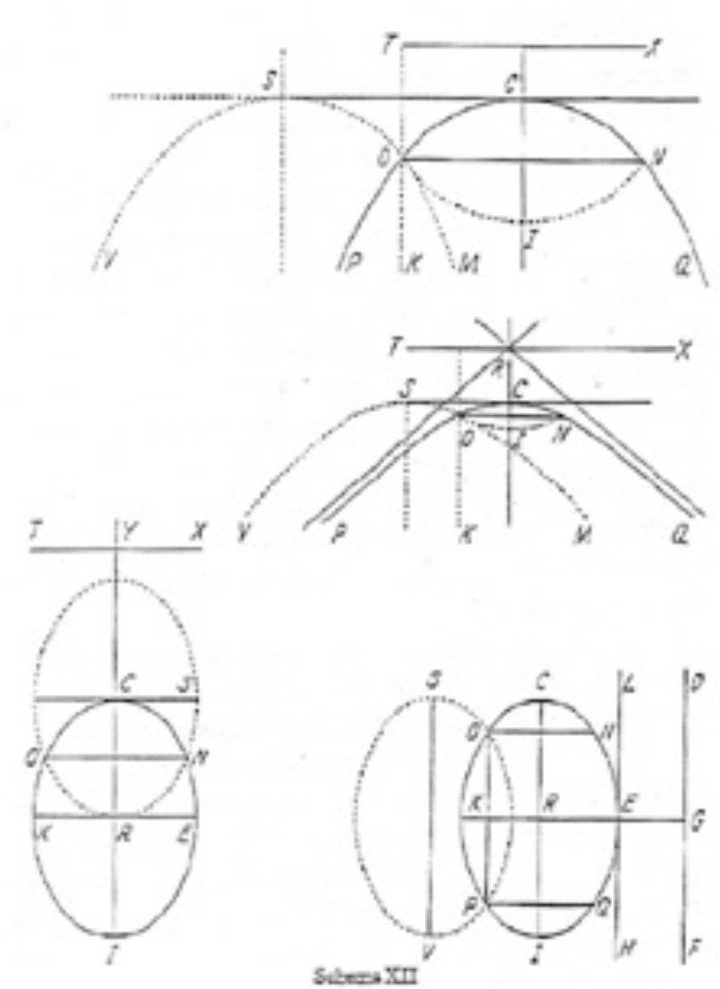
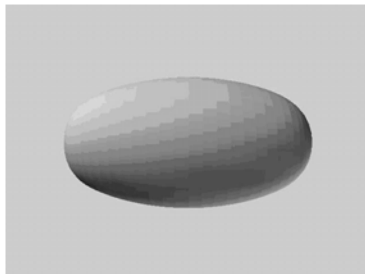


Figura tratta da [2] pag. 41

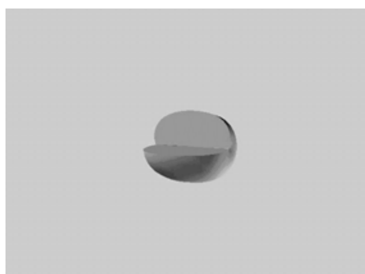
4.1.2 Ellisse

Asse parallelo all'asse maggiore di simmetria CI.

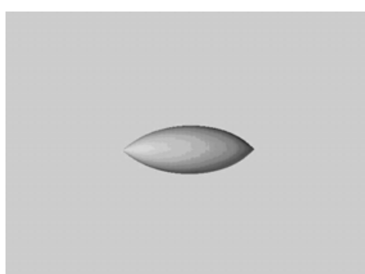
- Con asse coincidente con l'asse di simmetria si ottiene lo SFEROIDE OBLUNGO o UOVO.



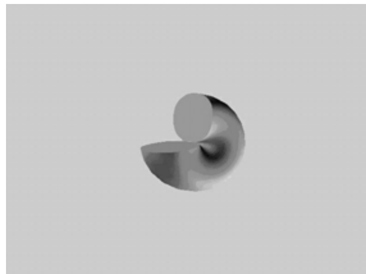
- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, OCQ, si ottiene un solido simile alla MELA COTOGNA.



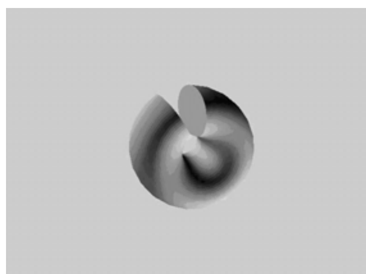
- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, si ottiene un solido simile ad una OLIVA o PRUGNA.



- Con asse LH tangente all'ellisse si ottiene un ANELLO ELLITTICO CHIUSO.

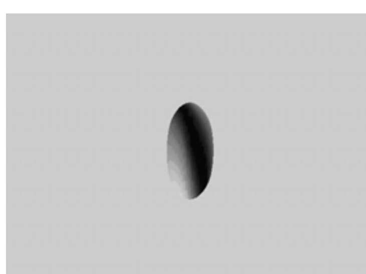


- Con asse DF esterno all'ellisse si ottiene un ANELLO ELLITTICO APERTO, simile ad una GHIRLANDA.

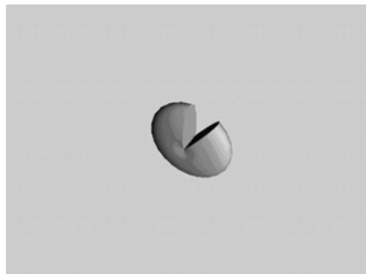


Asse parallelo all'asse minore di simmetria.

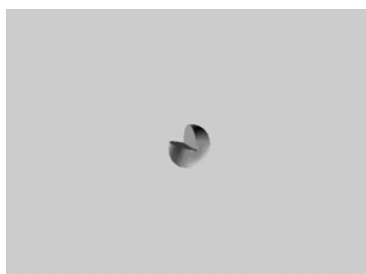
- Con asse coincidente con l'asse di simmetria si ottiene lo SFEROIDE SCHIACCIATO o LENTE.



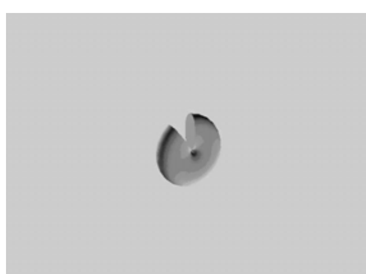
- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, OIN, si ottiene un solido dalla forma di LENTE con due rientranze in O e N.



- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, OCN, si ottiene un solido dalla forma simile ad una GROSSA PRUGNA.



- Con asse CS tangente in C alla figura si ottiene un ANELLO ELLITTICO CHIUSO LARGO, finito.



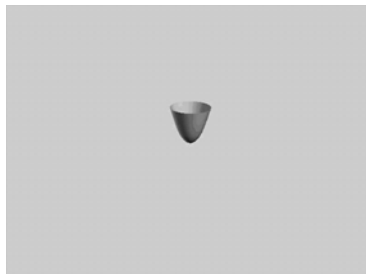
- Con asse TX esterno alla figura si crea un ANELLO ELLITTICO APERTO LARGO, finito.

I solidi generati dalla rotazione di circonferenza ed ellisse sono ripresi da Cavalieri nell'opera *Geometria degli indivisibili*, come si nota nella tabella alla fine della sezione dedicata al suo metodo dimostrativo.

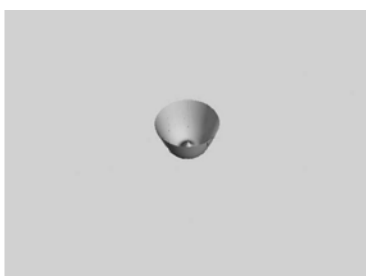
4.1.3 Parabola

Asse parallelo all'asse di simmetria CI.

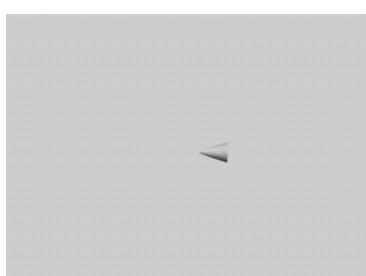
- Con asse coincidente con l'asse di simmetria si ottiene il CONOIDE PARABOLICO.



- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, OCQ, si ottiene un solido simile ad un CRATERE (acervo parabolico maggiore).

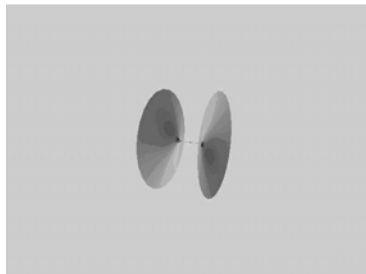


- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, si ottiene un solido simile ad un CORNO (acervo parabolico minore) (acuto).

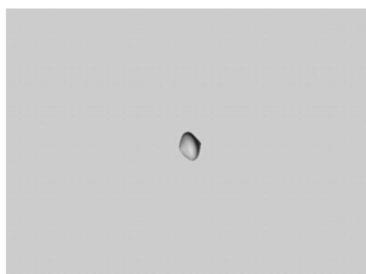


Asse perpendicolare all'asse di simmetria CI.

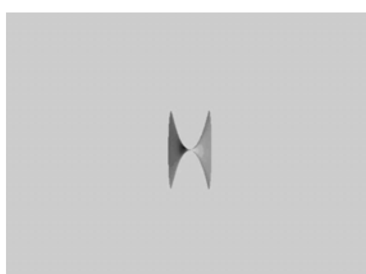
- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, infinita, si ottiene un solido con rientranze in corrispondenza di O e N.



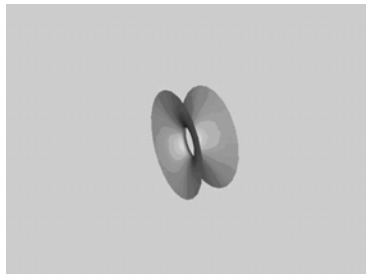
- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, OCN, si ottiene un FUSO PARABOLICO.



- Con asse CS tangente in C alla figura si ottengono BRACCI CP, CQ con punto C fisso (semianello parabolico chiuso).



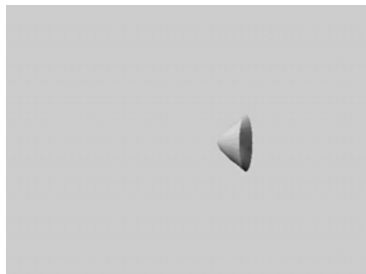
- Con asse TX esterno alla figura si creano BRACCI CP, CQ infiniti (semianello parabolico).



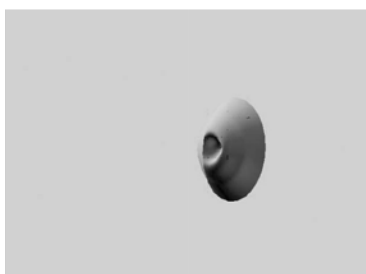
4.1.4 Iperbole

Asse parallelo all'asse di simmetria CI.

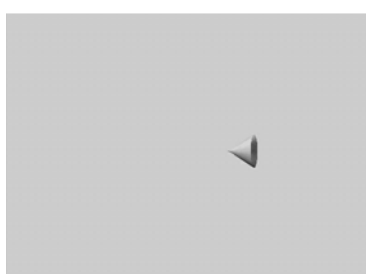
- Con asse coincidente con l'asse di simmetria si ottiene il CONOIDE IPERBOLICO.



- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, OCQ, si ottiene un solido simile ad un CRATERE (acervo iperbolico maggiore).

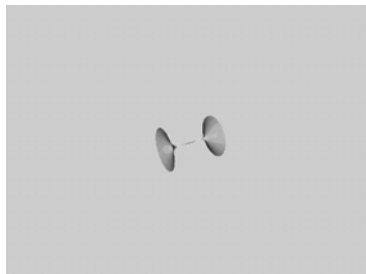


- Con asse OK all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, si ottiene un solido simile ad un CORNO (acervo iperbolico minore) (ottuso).

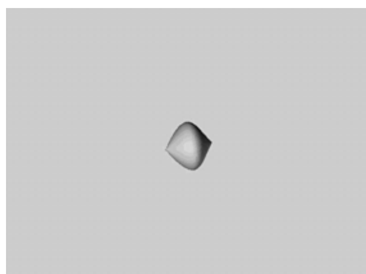


Asse perpendicolare all'asse di simmetria CI.

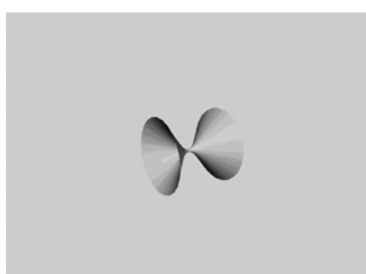
- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione maggiore della figura, infinita, si ottiene un solido con rientranze in corrispondenza di O e N.



- Con asse ON all'interno della figura facendo ruotare la porzione minore della figura, OCN, si ottiene un FUSO IPERBOLICO[1].



- Con asse CS tangente in C alla figura si ottengono BRACCI CP, CQ con punto C fisso (semianello iperbolico chiuso).



[1]Questi fusi in particolare sono molto ottusi e si nota che sono solidi appuntiti, con corpo circolare dalla cospicua rotondità, mentre verso i vertici tendono alla forma di un cono. Da quest'ultimo solido, tagliando i vertici O, N si ottiene un solido dalla forma di BOTTE.

- Con asse TX esterno alla figura si creano BRACCI CP, CQ infiniti (semianello iperbolico).

4.2 Traduzione dei teoremi

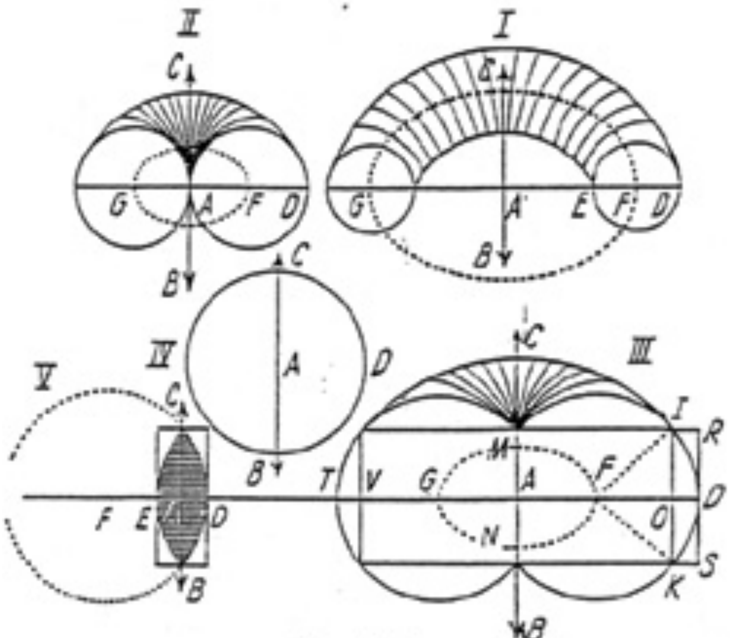
Teorema 18 ([2] pag. 47)
Il volume di un anello, di sezione circolare o ellittica, è equivalente al volume del cilindro, che ha per altezza la lunghezza della circonferenza disegnata dal centro della figura fatta ruotare e che ha per base la sezione dell'anello stessa.

Corollario ([2] pag. 47)
Questo rapporto tra le grandezze vale tanto nell'anello di sezione circolare quanto nell'anello ellittico alto, largo, sia aperto che chiuso.

Teorema 19 ([2] pag. 48)
Il volume dell'anello chiuso è equivalente al volume del cilindro che ha per base il cerchio della sezione dell'anello e per altezza la sua circonferenza.

Corollario ([2] pag. 48)
Il volume del solido simile a un cilindro ottenuto ruotando il quadrilatero mistilineo $MIKN$ (schema XI) è equivalente al prisma che ha per base questo quadrilatero e per altezza la lunghezza della circonferenza per FG. La parte che rimane all'esterno del cilindro, IKD, come la parte panciuta della botte, non viene toccata da questo teorema ma verrà indagata per altri motivi.

Analogia ([2] pag. 49)
Di nuovo, questa dimostrazione vale per ogni solido o segmento cilindrico di mela (e anche mela cotogna), sempre più sottile, finché dunque MN e IK coincidano, come nel caso IV, in cui al loro posto si considera un unico segmento BC, ed è il caso in cui la dimostrazione e l'uso del teorema smettono di valere perché si genera una sfera.



Schema XI

Corollario ([2] pag. 49)

Il volume della sfera e il volume dell'anello chiuso creato dallo stesso cerchio stanno tra loro come 7 sta a 33.

Teorema 20 ([2] pag. 49)

Il volume della zona della mela è composto dal volume di una zona sferica e dal segmento retto di cilindro che ha per base il segmento circolare che manca alla figura che genera la mela, e per altezza la lunghezza della circonferenza descritta dal centro del segmento sferico maggiore.
(considera solo il volume del solido creato dalla rotazione del segmento circolare esterno IKD)

Corollario e costruzione ([2] pag. 50)

Il volume della mela si può considerare come composto da tre elementi: un segmento cilindrico avente per base il segmento circolare IKD e per altezza FG, il solido simile ad un cilindro costruito sul quadrilatero mistilineo compreso tra IK e MN che ha per altezza la lunghezza della circonferenza percorsa da F attorno all'asse MN, e la zona sferica che ha IKD come sezione (schema XIV).

Corollario II ([2] pag. 51)

Allo stesso modo una zona di mela cotogna o di lente con due rientranze è composta da una zona, di sferoide oblungo e di sferoide schiacciato rispettivamente, e da un cilindro che ha per base il segmento ellittico che manca alla figura che genera il solido considerato e per altezza la lunghezza della circonferenza descritta dal centro della figura.

Teorema 21 ([2] pag. 51)

Il volume del cedro consiste nella differenza tra il volume di una zona sferica ed il volume del suddetto segmento cilindrico.

Corollario e costruzione ([2] pag. 52)

Trovato il segmento retto di cilindro $VTDO$ e l'equivalente della zona sferica $LSTV$, la loro differenza LSR è equivalente al cedro considerato.

Corollario II ([2] pag. 52)

Allo stesso modo il volume dell'oliva o della grossa prugna consistono nella differenza tra il volume della zona dello sferoide rispettivamente allungato e schiacciato ed il volume del suddetto segmento di cilindro, a base ellittica.

Teorema 22 ([2] pag. 52)

La zona di un cedro troncato da entrambe le parti da due cerchi uguali è composto dal volume del cedro minore creato dallo stesso segmento circolare che dà luogo alla parte esterna della zona e dal volume del segmento di cilindro la cui base maggiore è il segmento circolare che genera il cedro escluse le parti tolte e la cui base minore è il segmento circolare che genera il cedro minore, di altezza uguale alla circonferenza troncante.

Corollario II ([2] pag. 55)

La zona di un'oliva o di una grossa prugna troncate è composta similmente dal volume di un'oliva o di una prugna minore, creata dallo stesso segmento ellittico, e dal segmento cilindrico che ha per base lo stesso segmento ellittico e altezza equivalente alla circonferenza troncante l'oliva o la prugna.

Teorema 23 ([2] pag. 61)

Due coni, creati dalla rotazione di un triangolo rettangolo scaleno considerando come asse prima il cateto minore e poi il cateto maggiore stanno tra loro in proporzione come il cateto minore sta al cateto maggiore.

Teorema 24 ([2] pag. 61)

Il volume dell'uovo ottenuto ruotando l'ellisse attorno al suo asse maggiore sta al volume della lente ottenuta ruotando la stessa ellisse attorno all'asse minore come l'asse minore sta all'asse maggiore.

Teorema 25 ([2] pag. 62)

Il volume del segmento sferico sta al volume del cedro descritto dallo stesso segmento circolare come il semidiametro del segmento sferico sta alla sua altezza.

Teorema 26 ([2] pag. 63)

Se una certa retta è tangente ad una sezione conica e alla circonferenza di base del segmento di sferoide o di conoide da essa generato e interseca l'asse di simmetria, facendola ruotare attorno al diametro di base si ottiene un cono. La rotazione delle coniche attorno allo stesso diametro crea i solidi prugna, oliva o fuso, a seconda del tipo di conica, e sono tangenti al cono; inoltre fatta ruotare la retta attorno all'asse di simmetria si ottiene un altro cono; il rapporto tra i due coni è circa uguale al rapporto esistente tra la metà della prugna o dell'oliva con il segmento di sferoide, oppure del fuso con il suo conoide.

Teorema 27 ([2] pag. 66)

Se il cateto maggiore di un triangolo rettangolo qualsiasi è diviso in due parti uguali e anche in modo proporzionale agli altri due lati e nell'angolo opposto allo stesso cateto concorrono vari tipi di sezioni coniche tangenti all'ipotenusa e aventi vertice principale lungo il cateto maggiore, quelle che intersecano il cateto maggiore tra il vertice e la metà sono iperboli, quelle che intersecano la metà sono parabole, quelle che arrivano fino alla sezione proporzionale sono ellissi, quelle che intersecano il punto stesso sono cerchi, le rimanenti ellissi con asse minore lungo il cateto maggiore.

Corollario II ([2] pag. 68)

Da ciò senza dubbio dalle tangenti diventa facile dare un giudizio sul tipo di solido troncato. Infatti se due tangenti toccano il solido in punti delle circonferenze troncanti, nello schema XVIII nei punti G e F le rette FY, GY, la sezione Y considerata sarà in relazione con il rapporto esistente tra CY e lo stesso CO, metà della differenza tra i diametri medio e troncante: si avrà il tronco di un fuso parabolico se CY sarà minore, il tronco di un fuso iperbolico se CY sarà maggiore, il tronco di una prugna, oppure di un cedro, se YF starà a FO, come YC sta a CO, quindi di un'oliva ellittica se CY è doppia dello stesso CO.

Teorema 28 ([2] pag. 69)

Se i quattro tipi di sezioni coniche circonferenza, ellisse, parabola e iperbole si toccano in un vertice comune, e inoltre si intersecano in altri due punti alla stessa distanza dal vertice, ciascuno è secato dagli altri in questi due punti e tra le sezioni la circonferenza è quella più esterna, contiene l'ellisse che a sua volta contiene la parabola. Le sezioni più interne sono le iperboli e tra queste e le precedenti si trovano i loro asintoti propri.

Teorema 29 ([2] pag. 70)

Se cedro, prugna, fuso parabolico, fuso iperbolico e cono duplicato troncati avessero gli stessi cerchi sia per quanto riguarda le sezioni che il centro del solido: il cedro avrebbe volume massimo, gli altri starebbero nell'ordine di volume come sono stati elencati.

Teorema 30 - Problema ([2] pag. 71)

Calcolare il rapporto tra i segmenti di un cedro, di un'oliva, di una prugna e di un fuso creati da un piano parallelo all'asse di rotazione.

Riferimenti particolari: [2] pagg. 47-71.

5 Cavalieri

5.1 Il metodo di Cavalieri

La geometria degli indivisibili

L'opera che prendiamo in considerazione è comunemente indicata come *Geometria degli indivisibili.* Si tratta della prima e principale opera del gesuato Bonaventura Cavalieri, stampata nel 1635, costituita da 7 libri che vennero pubblicati in successione. Noi ci soffermeremo in particolare sul terzo libro, per trattare di solidi generati dalla rotazione di una figura piana attorno ad un'asse. Dovremo riferirci ai primi due libri per quanto riguarda definizioni e proposizioni che sono necessari per comprendere il metodo di Cavalieri, che compare proprio nel secondo libro ([3] pagg. 209-211). Nel settimo libro si trova una riformulazione del cosiddetto *principio di Cavalieri* ([3] pagg. 654-669), che per risolvere problemi di tipo filosofico diventa più specifica, come vedremo in seguito.

Lo spunto per la stesura dell'opera viene dall'interesse di Cavalieri per il problema riguardante la relazione esistente tra il rapporto tra due figure piane e quello tra i solidi generati dalla loro rotazione attorno ad un asse.

> *Per esempio, un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono, della stessa base, per rotazione attorno a un medesimo asse, è il triplo di esso, mentre tuttavia nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il detto cono.*
> Prefazione ([3] pag. 46)

Fin dalla prefazione dell'autore si capisce come egli sia orgoglioso dei risultati da lui ottenuti grazie a quella che egli chiama *nova ratio.* Si tratta di un nuovo approccio alla geometria, ispirato da idee già presenti nella filosofia del tempo, applicate per la prima volta al campo scientifico. Si considera il continuo come composto dai suoi indivisibili (cioè una retta dai suoi punti, una figura piana limitata da tutti i segmenti in essa compresi paralleli ad un segmento dato, di un solido da tutti i "piani" paralleli ad uno dato). Per la prima volta nello SCOLIO al TEOREMA I PROPOSIZIONE I del libro II ([3] pagg. 205-208), Cavalieri presenta il ruolo di indivisibili svolto da oggetti da lui definiti all'inizio del libro II stesso.

Riportiamo queste definizioni, tratte dal libro II ([3] pagg. 191-196), indispensabili alla comprensione dei teoremi successivi ed in particolare del libro III, al centro della nostra attenzione:

I.*) Se per tangenti opposte di una qualsivoglia figura piana data di conducono due piani mutuamente paralleli, perpendicolari, o inclinati rispetto al piano della figura data, indefinitamente prolungati dall'una e dall'altra parte, dei quali l'uno sia fatto muovere verso il rimanente, [rimanendo] ad esso sempre parallelo, fino* *a sovrapporsi ad esso - le singole linee rette, che durante tutto il moto sono intersezioni del piano mosso, e della figura data, prese insieme si chiamino: tutte le linee di tale figura, presa come riferimento una di esse; e ciò quando i piani siano perpendicolari alla figura data. Quando invece sono inclinati rispetto ad essa, si chiamino: tutte le linee del medesimo transito obliquo della figura data, [presa] come riferimento del pari una di esse; si potrà tuttavia, quando convenga, chiamare anche le [linee] prima dette di transito retto, così, come [si chiamano] queste [ultime] di transito obliquo; [insomma] precisamente del [transito], che avviene in tale inclinazione dei piani paralleli rispetto alla figura data.*

II.*) Se, dato un solido qualsivoglia, si siano condotti piani tangenti opposti di esso con un riferimento qualunque, prolungati indefinitivamente da ambo i lati, dei quali l'uno sia fatto muovere verso l'altro sempre ad esso parallelo, fino a sovrapporsi ad esso, i singoli piani, che vengono racchiusi nel solido dato durante tutto il movimento, insieme presi, si chiamino: tutti i piani del solido dato, preso come riferimento uno di essi.*

III.*) Se due linee rette incontrano internamente piani tangenti opposti, l'una perpendicolarmente, l'altra obliquamente, i punti, che sono intersezioni della linea data incidente perpendicolarmente, e dei singoli piani, che presi insieme si dicono: tutti i piani (prolungati tuttavia in modo, che possano secare [le rette]), ovvero i punti, che sono intersezione di essa, e del piano che è stata fatto muovere, generati nel moto complessivo, presi insieme si chiamino: tutti i punti di transito retto della linea data incidente perpendicolarmente; i quali punti nel [caso del]la incidente obliquamente si chiamino [invece: tutti i punti] del medesimo transito obliquo di essa.*

VIII. A.*) Data una qualunque figura piana, e condotta comunque in essa una linea retta avente i due estremi sul contorno, se si immagina che la linea retta stessa descriva una figura piana qualunque, non giacente nel piano della figura data, e si immagina quindi che le rimanenti di quelle [linee], che vengono dette tutte le linee della figura data, prese essendo riferimento la linea già condotta (e di transito retto se la figura descritta è perpendicolare al piano della data, oppure del medesimo transito obliquo, se inclinata rispetto ad essa, e precisamente di quel transito, che avviene in tale inclinazione) descrivano figure piane simili, e similmente poste, e parallele a quella per prima descritta, in modo che tutte le linee descriventi siano linee, o lati omologhi delle figure descritte, [allora] tutte le figure descritte insieme prese si diranno: tutte le figure piane simili di tale figura data, prese rispetto ad una di esse come riferimento, o anche rispetto alla linea stessa, o lato descrivente, come riferimento; cosicché se le figure descritte fossero quadrati, esse si direbbero: tutti i quadrati di tale figura data, oppure se fossero triangoli equilateri esse si direbbero: tutti i triangoli equilateri della medesima [figura data].*

VIII. B.*) Il solido, del quale tutte le figure simili descritte sono tutti i piani, si dirà: solido similare generato dalla figura data secondo il medesimo riferimento, secondo il quale tutte le dette figure simili sono state prese; i quali [solidi] in base alla loro generazione dalle figure date si diranno senz'altro: solidi similari generati dalle figure date secondo i riferimenti di tutte le figure simili, che* *danno luogo a tutti i piani di essi; le figure date invece si chiameranno le figure generatrici di essi.*

VIII. C.) *Quando poi tutte le figure descritte di due figure generatrici comunque [prese] saranno [tali che] non solo sono simili [le figure] che si trovano in ciascuna di esse, ma anche le figure che appartengono ad una di esse si trovano ad essere simili a tutte le figure simili dell'altra figura data, e se poi in ciascuno dei due solidi le figure saranno elevate secondo una medesima inclinazione sopra i piani delle figure generatrici, allora i solidi generati dalle figure date secondo quei riferimenti, che sono riferimenti di tutte le figure simili delle figure generatrici date stesse, si diranno solidi similari tra loro, o mutuamente, generati dalle figure dette secondo i riferimenti detti; oppure si sottintenderà sempre che sono similari tra di loro, o mutuamente, anche se ciò non verrà esplicitamente detto, tutte le volte che non venga aggiunto qualcosa in contrario.*

VIII. D.) *Avendo invece due figure in un medesimo piano collocate sulla medesima altezza, chiameremo i rettangoli [costruiti] sulle singole linee, che vengono dette tutte le linee di una delle figure date, e sui loro prolungamenti diretti nell'altra figura, insieme presi, nel seguente modo, e cioè: rettangoli [costruiti] sulle figure stesse[o compresi tra le figure], con quello stesso riferimento, che è il riferimento di tutte le linee prese.*

Cavalieri stesso indica il TEOREMA III PROPOSIZIONE III come base della propria geometria. Infatti esso indica un modo per confrontare aree di figure piane o volumi di solidi. Questo teorema è conosciuto come *principio di Cavalieri*, e vedremo che ne verrà data in seguito una seconda versione. Il principio in questione non è un vero e proprio teorema, nelle intenzioni di Cavalieri stesso: non ne viene presentata una dimsotrazione significativa. Si può invece considerare come definizione di area o volume a partire dalla misura degli indivisibili lineari (o piani). Un indivisibile di una figura piana è sempre, nella *Geometria degli indivisibili*, un segmento (*linea*) parallelo ad una retta data (*regula*), mentre un indivisibile di una figura solida è una sua sezione piana (*planum*), parallela ad un piano di riferimento fisso (*regula*) ([3] pagg. 63-64). Una volta dimostrato che tra gli aggregati degli indivisibili di due figure piane esiste un rapporto, si può definire come misura della prima rispetto alla seconda, cioè come area della prima rispetto alla seconda assunta come unità di misura, tale rapporto. All'epoca di Cavalieri sarebbe sembrato assurdo *definire* la estensione (area) di una figura.

TEOREMA III PROPOSIZIONE III libro II ([3] pagg. 209-211)
Figure piane hanno tra di loro il medesimo rapporto, che hanno tutte le linee di esse prese con un riferimento qualunque; e figure solide lo stesso rapporto che hanno tutti i piani di esse presi rispetto a un riferimento qualunque.

COROLLARIO ([3] pag. 211)
Discende in modo evidente da ciò che, per trovare quale rapporto abbiano tra di loro due figure piane o solide, sarà per noi sufficiente trovare, nelle figure piane, quale rapporto abbiano tra di loro tutte le linee di esse, e, nelle figure solide, tutti i piani di esse, presi rispetto a un riferimento qualunque, il che pongo come massimo fondamento di questa mia nuova Geometria.

Questo metodo segna una tappa per vari aspetti della matematica. Innanzitutto, Cavalieri individua insiemi in modo del tutto nuovo: non elencando uno per uno i suoi elementi, ma assegnando una proprietà caratteristica dei componenti dell'insieme. Questo tipo di definizione è applicato agli insiemi infiniti con cui Cavalieri lavora ("tutte le linee" e "tutti i piani"). L'aggettivo "infinito" è sempre evitato da Cavalieri, si veda ad esempio la citazione seguente.

Pur pensando infatti all'infinito vuole evitare confronti e critiche da parte della filosofia aristotelico-tomista, diffusa nelle scuole del tempo. Per superare le obiezioni della filosofia corrente Cavalieri fa riferimento ai procedimenti dell'algebra, anche se non ne fa uso nelle sue dimostrazioni. Egli infatti giustifica il suo ricorso a insiemi infiniti paragonandolo all'uso delle radici irrazionali di numeri interi pur non conoscendone il valore esatto, come si nota nel paragrafo:

Mi sono poi avvalso di un artificio simile a quello che gli Algebristi sogliono utilizzare per risolvere le questioni proposte. Essi, invero, pur quando le radici dei numeri siano ineffabili [irrazionali], assurde e ignote, ciò non di meno le addizionano, sottraggono, moltiplicano e dividono, e sono persuasi di avere sufficientemente compiuto il loro dovere purché siano riusciti a tirar fuori la notizia desiderata del problema dato. Non altrimenti dunque io stesso mi sono avvalso, per investigare la misura dei continui, della congerie [insieme] degli indivisibili, linee o piani (...), benché, per quanto concerne il numero di essi, innominabile, assurda e ignota, tuttavia racchiusa in ben visibili limiti per quanto concerne la sua grandezza; come apparirà chiaro a chi legge nel corso dell'opera.
Prefazione

Un problema filosofico ben noto nel Seicento è la composizione del continuo mediante i suoi indivisibili, cioè di una retta mediante i suoi punti, di una figura piana limitata mediante tutti i segmenti in essa compresi paralleli ad un segmento dato, di un solido mediante tutti i "piani" paralleli ad uno dato. Un continuo è generato dal movimento "fluente" di un suo indivisibile, per l'autore ([3] pag. 197). Egli tuttavia distingue nettamente tra somma degli elementi di un continuo, nel senso della misura, e insieme degli elementi del continuo stesso. Per Cavalieri il continuo non è costituito dalla somma dei suoi indivisibili ([3] pag. 652), egli si limita a mettere in relazione il continuo con l'insieme costituito dagli indivisibili. Ritorna il concetto di insieme infinito: Cavalieri tratta gli indivisibili come insieme, non preoccupandosi della cardinalità dello stesso. L'importante è la definibilità e la pensabilità di questi insiemi, nonostante siano composti da infiniti elementi: esiste un criterio preciso che permette di decidere se un elemento appartiene o meno all'insieme in questione.

L'idea che due insiemi infiniti siano confrontabili è un'altra delle conquiste di Cavalieri, che già nel TEOREMA I del libro II affermava la confrontabilità di due insiemi di indivisibili, concetto ribadito nella SEZIONE XXIV CAPITOLO VIII APPENDICE II, "La polemica con Guldino".

Cavalieri si pose questo problema fin dal 1621, quando intuì che fosse possibile dedurre il rapporto tra due solidi a partire dalle sezioni piane corrispondenti. La giustificazione di tale confrontabilità risiede nel fatto che tali insiemi contano un numero infinito di elementi, che tuttavia occupano superfici o solidi di area o volume finiti. A questo si riferisce anche la seconda parte della citazione precedente. Come sono confrontabili tra loro tali continui, così lo sono gli insiemi infiniti dei loro indivisibili.

TEOREMA I PROPOSIZIONE I libro II ([3] pagg. 201-208)
Tutte le linee di transito retto di figure piane quali si vogliano, e tutti i piani di [figure] solide quali si vogliano, sono grandezze che hanno un rapporto tra di loro [confrontabili].

Tuttavia, nonostante queste [argomentazioni] dico che confrontandosi tra di loro i continui, con ugual ragione si possono confrontare gli aggregati di indivisibili, e che non osta il fatto che in atto il continuo non sia risolto nelle sue infinite parti, ... Non è poi necessario che essi tutti [indivisibili] siano in atto tracciati sul continuo perché i loro aggregati siano confrontati, ma basta che l'intelletto [partendo] da alcuni [indivisibili] tracciati in numero finito concepisca gli aggregati stessi, e faccia venire alla luce il rapporto di essi come [se si trattasse del rapporto] di radici ineffabili [irrazionali] per dedurre tale rapporto anche per i continui, ossia per le figure.
Sezione XXIV capitolo VIII appendice II ([3] pagg. 815-817)

La questione degli indivisibili e del continuo era già presente, con gli stessi termini, nella filosofia scolastica medievale. È utile indicare le tre posizioni filosofiche fondamentali riguardo la composizione del continuo:

1. Posizione atomistica: un continuo è composto dai suoi indivisibili, è la somma dei suoi indivisibili.

2. Posizione semiatomistica: un continuo è generato dal movimento di un suo indivisibile: l'indivisibile, muovendosi, lascia come traccia del suo passaggio la infinità degli indivisibili esistente nel continuo.

3. Posizione antiatomistica: un continuo non è somma dei suoi indivisibili. Un segmento non è la somma di punti, una superficie una somma di linee. Un indivisibile, muovendosi, genera sì un continuo (di una dimensione in più rispetto all'indivisibile), ma non una successione di indivisibili, tracciata dal suo passaggio.

A causa di queste posizioni filosofiche, trattare l'infinito comportava incorrere in critiche da una o dall'altra fazione. Cavalieri cercò di mettersene al riparo sia sostituendo il termine con "indefinito" che riformulando il principio che chiamiamo secondo metodo degli indivisibili, non considerando più il confronto tra insiemi infiniti, bensì considerando il rapporto di due indivisibili corrispondenti (che si suppone costante) per definire il rapporto di due figure, piane o solide. Questo secondo metodo risulta essere meno generale del primo, perché permette di trattare soltanto figure "ugualmente analoghe", ossia figure che abbiano la medesima altezza e in cui indivisibili presi alla medesima "quota" risultino avere un rapporto costante. Questo sarà anche il rapporto tra le due figure considerate.

Abbiamo già detto come per Cavalieri il continuo non sia composto dai suoi indivisibili, ma che possa essere messo in relazione con l'insieme degli indivisibili stessi. In questa seconda versione del metodo risulta che i continui seguono il rapporto degli indivisibili, e viceversa.

TEOREMA I PROPOSIZIONE I libro VII ([3] pagg. 654-669)
Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali - condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione - le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro. E figure solide quali si vogliano collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali - condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli - le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali tra di loro. Le figure si chiamano poi ugualmente analoghe, se confrontate tra di loro, tanto quelle piane, che quelle solide, e anche [si dica che esse lo sono] rispetto alle linee, o ai piani paralleli, tra i quali si suppongono collocate, prese come riferimenti, quando sia necessario dirlo esplicitamente.

Il *principio di Cavalieri* si può semplificare con questa asserzione: "se due aree piane tagliate da un sistema di rette parallele intercettano, sopra ognuna di queste, due corde uguali le due aree sono uguali; se le due corde corrispondenti hanno rapporto costante, lo stesso rapporto passa tra le aree".

Cavalieri ha usato questo secondo metodo per ridimostrare molte delle proposizioni presenti nei primi sei libri. La validità di questo metodo era assicurata, per Cavalieri, da aver ottenuto gli stessi risultati, anche rispetto a quelli di Archimede, Euclide e Keplero ([3] pag. 54). Nella prefazione ([3] pagg. 45-55) Cavalieri dimostra già uno spiccato interesse verso gli studi e i risultati raggiunti da Keplero riguardo al calcolo del volume di solidi di rotazione. Il numero dei solidi presentati dal suo predecessore erano infatti un buon banco di prova per il metodo introdotto, visto che per Cavalieri applicare il metodo ad un numero sempre più grande di figure piane e solidi assicurava la validità del nuovo metodo. Un altro contributo fondamentale di Cavalieri sono le definizioni di carattere generale, caratteristica comune ai teoremi che introdurremo successivamente. Egli stesso evidenzia la validità generale del suo metodo:

Invero, non tacerò la somma generalità di questo metodo di dimostrazione in confronto agli altri; infatti, ciò che gli altri dimostrano per una specie di solidi, o tutt'al più per poche, noi lo dimostriamo d'un colpo per infinite. Infatti, ad esempio, qui si dimostra non soltanto che un cilindro è il triplo di un cono collocato sulla medesima base e altezza, ..., ma che, eseguita sulla base una variazione qualunque, non limitata da nessun numero assegnato, il solido appoggiato su di essa che chiamiamo "cilindrico", è il triplo di quello che chiamiamo "conico" collocato sulla stessa base e altezza con esso; le specie dei quali solidi appare evidentemente essere indefinite di numero. Prefazione ([3] pag. 53)

Cavalieri considererà anche solidi non trattati da Keplero, limitandosi tuttavia a quelli con asse di rotazione parallelo all'asse di simmetria della conica generatrice tra quelli presentati nel Supplementum ad Archimedem. I solidi generati da sezioni coniche sono trattati nei libri III, IV e V della *Geometria degli indivisibili*. Noi ci soffermeremo in particolare su quelli generati dalla rotazione di cerchi, o ellissi, e sezioni di essi, per portare esempi da poter confrontare con le dimostrazioni di Keplero.

Riportiamo di seguito uno schema riassuntivo in cui si elencano i detti solidi e i riferimenti all'opera di Cavalieri. Tutti questi si ritrovano nel libro III come corollari alla PROPOSIZIONE XXXIV ([3] pagg. 385-414).

Solido	Corollario	Proposizione sulle figure piane
Sfera	I II V	I II V
Anello aperto circolare	XIV	XVI
Anello chiuso circolare	XIII	XIII
Mela	XIX	XXII
Cedro	XX XXI XXII	XXIII XXIV XXV e successivi
Sferoide oblungo	I II V	I II V
Mela cotogna	XIX	XXII
Oliva	XX XXI XXII	XXIII XXIV XXV e successivi
Anello ellittico chiuso	XIII	XIII
Anello ellittico aperto	XIV	XVI

Sferoide schiacciato	I II V	I II V
Lente con rientranze (melone)	XX XXI XXII	XXIII XXIV XXV e successivi
Grossa prugna	XIX	XXII
Anello ellittico chiuso largo	XIII	XIII
Anello ellittico aperto largo	XIV	XVI

Come si può notare dai teoremi presentati, il metodo dimostrativo di Cavalieri differisce di molto da quello infinitesimale di Keplero.

Notevole è la generalità della PROPOSIZIONE XXXIV, che nella sua formulazione prende in considerazione la totalità dei solidi:

> TEOREMA XXXIII PROPOSIZIONE XXXIV ([3] pagg. 385-388)
> *Solidi quali si vogliano mutuamente similari, generati dalle figure sopra considerate in questo libro III, rispetto ai riferimenti ivi stesso scelti, delle quali si sia trovato il rapporto di tutti i quadrati, hanno tra di loro un rapporto noto.*

Il caso particolare dei singoli solidi viene trattato nei vari corollari, riferendosi alle proposizioni che riguardano i rapporti tra le figure piane generatrici.

Riferimenti bibliografici: [3].

5.2 Teoremi illustrativi

Abbiamo scelto come esempio illustrativo il teorema riguardante il confronto tra il volume del cedro e del cilindro circoscritto avente stesso asse di rotazione (COROLLARIO XX al TEOREMA XXXIII, [3] pagg. 404-405). Esso si riferisce al TEOREMA XXII PROPOSIZIONE XXIII riguardante il cerchio.

> TEOREMA XXII PROPOSIZIONE XXIII ([3] pagg. 366-368)
> *Data la figura del circolo del teorema precedente, e in esso presa comunque la porzione minore RFV, restando inalterate tutte le altre ipotesi, dico che tutti i quadrati di ΔV stanno a tutti i quadrati della porzione RFV come una volta e mezza FM sta al resto del diametro MH della porzione maggiore, tolta da esso una linea retta, alla quale una [linea] tripla di MN stia come il parallelogramma ΔV sta alla porzione RFV.*

Infatti, i rettangoli costruiti su ΔV, VT, stanno a tutti i quadrati di RZ come uno [dei primi] sta ad uno [dei secondi], cioè come il rettangolo FMI sta al quadrato di VZ, oppure al quadrato di RV; così pure tutti i quadrati di RZ sono sei volte i rettangoli costruiti sulla porzione RFV e sul quadrangolo mistilineo $RTHYV$, cioè stanno ad essi come il quadrato di RV sta a $1/6$ di sé stesso. Pertanto, confrontando, i rettangoli costruiti su ΔV, VT, staranno ai rettangoli costruiti sulla porzione RFV e sul quadrangolo mistilineo $RTHYV$, come il rettangolo FMI sta a $1/6$ del quadrato di RV, oppure come il rettangolo FMN sta a $1/6$ dei quadrati di RM, MV, cioè a $1/3$ del quadrato di RM, cioè al rettangolo costruito su FM e $1/3$ di MH, cioè come MN sta a $1/3$ di MH, oppure come il triplo di MN sta a MH.

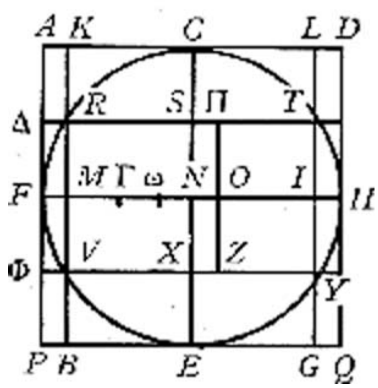


Immagine dal TEOREMA XXI ([3] pag. 362)

Inoltre, i medesimi rettangoli costruiti su ΔV, VT, stanno ai rettangoli costruiti sulla porzione RFV, e su RY, come il parallelogramma ΔV sta alla porzione RFV; pertanto, se si farà in modo che, come ΔV sta alla porzione RFV, così il triplo di MN sta a $H\omega$, [allora] i rettangoli costruiti su ΔV, VT staranno a ciò che resta quando si tolgano i rettangoli costruiti sulla porzione RFV e su RY dai rettangoli costruiti sulla porzione medesima e sul quadrangolo mistilineo $RTHYV$ cioè ai rettangoli costruiti sulla porzione RFV e sulla porzione THY cioè a tutti i quadrati della porzione RFV, come il triplo di MN sta a $M\omega$.

Ma tutti i quadrati di ΔV stanno ai rettangoli costruiti su ΔV, VT, come il quadrato di FM sta al rettangolo FMI, cioè come FM sta a MI, oppure come una volta e mezza FM sta ad una volta e mezza MI, cioè al triplo di MN; i rettangoli, poi, costruiti su ΔV, VT, stanno a tutti i quadrati della porzione RFV come il triplo di MN sta a $M\omega$; pertanto, confrontando, tutti i quadrati di ΔV staranno a tutti i quadrati della porzione RFV come una volta e mezza FM sta a $M\omega$, che è il resto di MH, sottratta $H\omega$, alla quale la [linea] tripla di MN sta come ΔV sta alla porzione RFV; il che era necessario far vedere.

TEOREMA XXIII PROPOSIZIONE XXIV ([3] pagg. 368-369)
Data di nuovo la figura del circolo del teorema XXI, bisogna far vedere che tutti i quadrati della porzione minore, RFV, comunque presa, con riferimento il diametro, ossia FM, stanno a tutti i quadrati di essa, con riferimento la base, ossia RV, come il rettangolo costruito su ωM e sulla base RV sta a tre quadrati della linea RM, con il quadrato di MF.

Infatti, tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM stanno a tutti i quadrati di ΔV, con il medesimo riferimento, come ωM sta ad una volta e mezza FM, cioè come i 2/3 di ωM stanno a FM; così pure, tutti i quadrati di ΔV, con riferimento FM, stanno a tutti i quadrati del medesimo parallelogramma ΔV, con riferimento RV, come FM sta a RV. Pertanto, confrontando, tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM, staranno a tutti i quadrati di ΔV, con riferimento RV, come i 2/3 di ωM staranno a RV, oppure come 1/3 di ωM starà a RM; cioè, presa come altezza comune RM, come il rettangolo che ha per lati 1/3 di ωM e RM, sta al quadrato di RM, oppure al rettangolo FMH. Ancora: tutti i quadrati di ΔV, con riferimento RV, stanno a tutti i quadrati della porzione RFV, con il medesimo riferimento, come HM sta alla linea composta da 1/2 HM e da 1/6, MF; cioè, presa MF come altezza comune, come il rettangolo FMH sta al rettangolo avente per lati FM e la linea composta da 1/2 HM e da 1/6 MF.

Ma tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM, stavano a tutti i quadrati di ΔV, con riferimento RV, come il rettangolo avente per lati 1/3 ωM e RM sta al rettangolo FMH; perciò, confrontando, tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM, stanno a tutti i quadrati della medesima, con riferimento RV, come il rettangolo avente per lati 1/3 ωM e RM sta al rettangolo avente per lati FM, e la linea composta da 1/2 HM e 1/6 MF, cioè come il rettangolo costruito sull'intera [linea] ωM, e su RM, sta al rettangolo costruito su FM e sulla [linea] composta da 1/2 FM e da una volta e mezza MH, cioè composta da 1/2 FM, e da una volta e mezza MI, e da una volta e mezza IH; d'altra parte una volta e mezza IH più 1/2 FM dà come risultato le due [linee] FM, IH; se aggiungerai ad esse MI, detratta dalla [linea che è] una volta e mezza la MI stessa, si avrà la intera FH, insieme alla MN, [che formano una linea] uguale alla metà di FM e della [linea] una volta e mezza MH.

Pertanto, tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM, staranno a tutti i quadrati della porzione medesima, con riferimento RV, come il rettangolo avente per lati ωM e RM sta al rettangolo avente per lati FM e la [linea] unione di FH, MN, cioè al rettangolo di lati FM e MN, più quello di lati FM e MH, più il quadrato di $-FM$: poiché, inoltre, il rettangolo FMH uguaglia il quadrato di RM, tutti quei quadrati staranno [tra di loro] come il rettangolo di lati ωM e RM sta al quadrato di RM, al quadrato di MF, e al rettangolo di lati FM, MN, oppure come i doppi di questi, ossia come il rettangolo di lati ωM e RV sta al quadrato di RM, al quadrato di MV, a due quadrati di FM e a due rettangoli di lati FM, MN, cioè un rettangolo di lati FM, MI: se aggiungerai a quest'ultimo uno dei due quadrati di FM, si formerà il rettangolo FMH, che è uguale al quadrato di RM. Pertanto, tutti i quadrati della porzione RFV, con riferimento FM, stanno a tutti i quadrati della porzione medesima, con riferimento RV, come il rettangolo costruito su

ωM e su RV sta a tre quadrati di RM più un quadrato di FM; il che occorreva dimostrare.

TEOREMA XXXIII PROPOSIZIONE XXXIV
Solidi quali si vogliano mutuamente similari, generati dalle figure sopra considerate in questo libro III, rispetto ai riferimenti ivi stesso scelti, delle quali si sia trovato il rapporto di tutti i quadrati, hanno tra di loro un rapporto noto.

Poiché, infatti, è stato altrove dimostrato che, come stanno tra di loro tutti i quadrati di due figure prese con dati riferimenti così stanno [tra di loro] solidi mutuamente similari generati dalle medesime figure secondo i medesimi riferimenti, di conseguenza, quando nei teoremi di questo libro è stato trovato il rapporto di tutti i quadrati di due certe figure con certi riferimenti, ne deduciamo ora anche che è lo stesso il rapporto di due solidi mutuamente similari, i quali si dicono generati da quelle figure secondo i medesimi riferimenti. Cosi, ad esempio, nella PROPOSIZIONE I, prese di nuovo in esame le figure di essa, poiché ivi è stato dimostrato che, preso come riferimento DP, tutti i quadrati della porzione DEP stanno a tutti i quadrati del parallelogramma FP come la [linea] composta dalla sesta parte di EB e dalla metà di BR sta a BR stessa, è dimostrato nel tempo stesso che un solido similare generato dalla porzione DEP sta al solido ad esso similare generato dal parallelogramma FP, come la [linea] composta dalla sesta parte ai EB e dalla metà di BR sta a BR stessa. Quando invece è stato dimostrato che tutti i quadrati della porzione EDP stanno a tutti i quadrati del triangolo DEP come la [linea] composta dalla metà dell'intera ER, e dalla BR, sta alla BR stessa e stato dimostrato del pari che un solido similare generato dalla porzione EDP sta a un solido ad esso similare generato dal triangolo DEP, secondo i medesimi riferimenti, come la [linea] composta dalla metà dell'intera ER e dalla BR sta alla BR stessa.

Quando poi nel corollario del medesimo teorema si è dedotto che tutti i quadrati del parallelogramma FP sono una volta e mezza tutti i quadrati della porzione DEP (nel caso che DP passi per il centro A), mentre questi [ultimi] sono il doppio di tutti i quadrati del triangolo DEP, è evidente che anche un solido similare generato dal parallelogramma FP sarà una volta e mezza e un solido ad esso similare generato dalla porzione DEP secondo il medesimo riferimento DP [e che] questo sarà poi il doppio di un solido ad esso similare generato dal triangolo DEP, secondo il medesimo riferimento, DP.

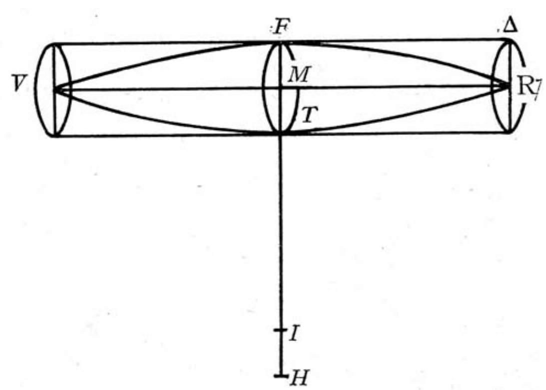
SCOLIO

Poiché, invero, i solidi tra di loro similari generati da due figure piane, secondo dati riferimenti, sono tanti, quante sono le figure simili che si dicono tutte le figure simili delle due figure generatrici, prese con i medesimi riferimenti, rispetto ai quali i detti solidi similari si dicono generati, e le variazioni delle figure non sono racchiuse in nessun numero dato di conseguenza neppure le variazioni dei solidi similari sono ristrette nell'ambito di alcun numero dato; donde appare in modo evidentissimo che questo metodo di dimostrare, e la stessa dimostrazione, e, per così dire, infinitamente ricco. Quando, dunque discendiamo [al caso] di solidi similari particolari, occorre esaminare le figure che vengono chiamate tutte le figure simili ecc. Risulta dunque evidente da cose da me altrove dimostrate che, se le figure prese sono tutte le figure simili di un parallelogramma, allora codeste [figure] saranno tutti i piani di un solido cilindrico; se invece esse sono tutte le figure simili di un triangolo (nel parallelogramma, e nel triangolo, si intenda scelto come riferimento uno dei lati) quelle saranno tutti i piani di un solido conico; e se il parallelogramma è rettangolo e la figura innalzata perpendicolarmente sopra di esso, sarà un solido cilindrico retto; sarà invece scaleno se il parallelogramma non è rettangolo, oppure se le figure non sono innalzate perpendicolarmente sopra di esso. Da ciò hai che, quali tu immagini che siano quelle figure, le quali sono dette tutte le figure simili del parallelogramma FP, con riferimento DP, o del triangolo EDP, con il medesimo riferimento, il solido, che chiamiamo similare, generato dal parallelogramma FP è sempre cilindrico, mentre quello generato dal triangolo DEP è sempre conico, come accade anche per ogni parallelogramma e triangolo, fintantoché il riferimento sia uno dei lati di essi. Dunque, i solidi similari generati dai parallelogrammi sono cilindrici, quelli invece generati da triangoli sono conici: generati, dico, essendo il riferimento uno dei lati di essi. Se poi le figure, che vengono dette tutte le figure simili del parallelogramma dato, con riferimento uno dei lati, sono circoli, quel solido cilindrico sarà un cilindro; e se quelle [figure] che vengono dette tutte le figure simili di un dato triangolo sono del pari circoli, e il riferimento è uno dei lati, il solido conico sarà un cono. Pertanto qui il cilindro e il cono rientrano nella denominazione comune di solidi similari; ad essi spetta la denominazione particolare di solidi cilindrici e conici, ma con denominazione ancora più particolare, e loro propria, vengono detti cilindro e cono, tutte le volte che le dette figure siano circoli, stando a quanto ho altrove dimostrato.

Del pari, se le figure generatrici dei solidi sono circoli, o ellissi, e quelle [figure] che vengono dette tutte le figure simili di esse, prese con dati riferimenti, sono parimenti dei circoli, le linee rette che descrivono i quali nelle figure generatrici sono loro diametri, i solidi similari generati dalle [figure] medesime secondo i medesimi riferimenti, saranno, l'uno, una sfera, cioè quello che viene generato dal circolo, l'altro uno sferoide, cioè quello che viene generato dall'ellisse, se le figure simili secano perpendicolarmente l'asse dell'ellisse, e sono innalzate perpendicolarmente tanto al circolo, quanto alla ellisse; potrà pure essere uno sferoide, anche se le figure simili non sono circoli, ma ellissi, in base a quanto è stato altrove dimostrato; i quali solidi, dunque, in questo caso, vengono chiamati, con denominazione comune, solidi similari generati dal circolo, o dall'ellisse, secondo i riferimenti dati, con denominazione particolare, e loro propria, vengono detti sfera, oppure sferoide.

E, del pari, quei solidi che si chiamerebbero con denominazione comune solidi similari generati dalla porzione tale, o tal altra, secondo tale riferimento (dico da una porzione di circolo, o di ellisse) tutte le volte che le figure, le quali vengono dette tutte le figure simili di tale porzione secondo tale riferimento, sono circoli perpendicolari alle figure generatrici, e la figura generatrice è una porzione di circolo, sarà[nno] e si chiamerà[nno] con denominazione particolare, e loro propria, porzioni di sfera; se invece la figura generatrice è una porzione di ellisse, e le figure simili sono circoli innalzati perpendicolarmente alle generatrici, secanti ad angolo retto l'asse della porzione, ne nascerà una porzione di sferoide; nel caso poi che [le figure] siano ellissi perpendicolari alle generatrici, aventi diametri come richiede la PROPOSIZIONE XLVII del libro I ([3] pag. 171), ne nascerà anche una porzione di sferoide. Così, dunque, con nomi particolari si è abituati a chiamare questi solidi. Quando invece come figure simili non sono presi nè circoli nè ellissi, [allora], come è stato detto, sarà sufficiente chiamare i [solidi] medesimi con il nome comune di solido similare ecc.; benché a seconda della variazione, e della denominazione, delle figure simili, di conseguenza anche i vari solidi stessi possano variamente denominarsi. Può darsi, poi, che in quanto seguirà formeremo vari nomi al variare delle figure generatrici; per ora ci si attenga a questi, con la seguente avvertenza: che nelle cose sopra [dette], quando si tratta di sfera, o di sferoide, o di loro porzioni, suppongo che le linee, che appartengono alle figure generatrici e descrivono circoli, oppure ellissi, siano loro assi. Premessa la dimostrazione di tutte queste cose, si ricavano i corollari che seguono, i quali invero è stato necessario stampare in diversi caratteri, mancando al tipografo i consueti caratteri di tal sorta.

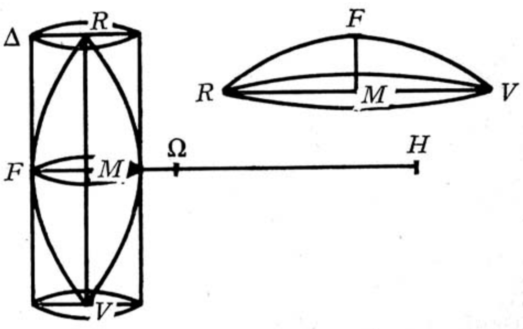
COROLLARIO XX ([3] pagg. 404-405)



Nella PROPOSIZIONE XXIII, presa dalla figura del TEOREMA XXI, comunque, una porzione minore, RFV, la quale sia una porzione di circolo, con il rettangolo ΔV ad essa circoscritto, preso anche l'intero asse FH, e il punto ω su di esso così come ivi è stato preso, è evidente che il solido similare generato da ΔV sta al solido ad esso similare generato dalla porzione minore, RFV, come una volta e mezza FM sta a $M\omega$. Si faccia ruotare dunque, per ottenere il nostro esempio, ΔV, attorno a RV, fissa; allora il cilindro descritto da ΔV starà al solido descritto dalla porzione RFV come una volta e mezza FM sta a $M\omega$, e così [andranno le cose] per i rimanenti solidi similari generati da essi ecc.

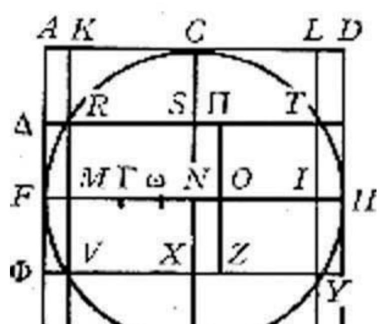
Si chiamano poi *frutto di cedro* il solido descritto attraverso la sua rivoluzione dalla porzione minore del circolo, RFV.

COROLLARIO XXI ([3] pag. 405)



Nella PROPOSIZIONE XXIV, presa ancora la figura della precedente [proposizione], la quale compie una rotazione, si deduce che un solido similare generato dalla porzione RFV, secondo il riferimento [dato dall'] asse FM, sta a un solido similare generato dalla figura medesima, secondo il riferimento [dato dal]la base RV, come il rettangolo costruito su ωM e sulla base RV sta a tre quadrati della linea RM, con il quadrato di MF. Il nostro esempio si otterrà a mezzo della rivoluzione della porzione RFV, una volta attorno a RV, una seconda volta attorno a FM, [presi come] assi fissi. Nel primo caso dunque si viene a formare il frutto di cedro, a mezzo della rivoluzione attorno a RV, nel secondo un segmento di sfera, a mezzo della rivoluzione attorno a RV, nel secondo un segmento di sfera, a mezzo della rivoluzione attorno a FM. Risulta dunque evidente quale rapporto abbia il frutto di cedro al segmento di sfera generato a mezzo di una rivoluzione dalla medesima porzione di circolo; il che si è concluso [essere vero] anche per i rimanenti solidi similari, generati dalla medesima porzione, secondo i riferimenti detti.

Commento alle dimostrazioni



Nel TEOREMA XXII PROPOSIZIONE XXIII Cavalieri ricava il rapporto tra tutti i quadrati di un segmento circolare e tutti i quadrati del rettangolo avente le stesse dimensioni. L'espressione "tutti i quadrati" indica la serie di quadrati costruiti sui segmenti tagliati sulla figura da una retta fatta scorrere parallelamente a se stessa. Nel corso della dimostrazione si utilizza il concetto di "rettangoli costruiti su due figure piane": si tratta dei rettangoli aventi per dimensioni i segmenti tagliati sulle due figure dalla stessa retta, fatta scorrere poi parallelamente a se stessa. Tali figure devono appartenere allo stesso piano ed essere collocate sulla medesima altezza.

La dimostrazione inizia con il calcolo del rapporto tra i rettangoli costruiti su ΔV, VT e quelli costruiti su RFV, $RTHYV$, ottenuto confrontando i medesimi con tutti i quadrati di RZ. Si passa poi al calcolo del rapporto tra i rettangoli costruiti su ΔV, VT e quelli costruiti su RFV, RY. Considerando uno dei rettangoli su RFV, $RTHYV$, togliendo il rettangolo su RFV, RY costruito con la medesima retta si ottiene un quadrato che ha per lato il segmento staccato dalla retta su RFV. Dunque la differenza tra i rettangoli costruiti su RFV, $RTHYV$ e quelli costruiti su RFV, RY corrisponde a tutti i quadrati di RFV. Si ottiene il rapporto tra i rettangoli su ΔV, VT e tutti i quadrati di RFV. Si conosce il rapporto tra tutti i quadrati di ΔV e tali rettangoli su ΔV, VT, dunque per confronto si ottiene il rapporto tra tutti i quadrati su RFV e tutti i quadrati su ΔV. I rapporti considerati si ottengono mediante semplici sostituzioni e concetti geometrici euclidei.

Il TEOREMA XXXIII afferma che è possibile risalire al rapporto tra i solidi mutuamente similari costruiti sulle figure piane delle quali è già noto il rapporto tra tutti i quadrati di esse. Si tratta della diretta applicazione del cosiddetto *principio di Cavalieri* di cui si è già parlato.

Di rilevante importanza è anche il COROLLARIO XXI al medesimo TEOREMA XXXIII, che riguarda il rapporto tra il volume dei solidi generati dalla rotazione del medesimo segmento circolare, attorno alla sua base e alla sua altezza. Si tratta infatti di una correzione del risultato ottenuto da Keplero a riguardo: "Il volume del segmento sferico sta al volume del cedro descritto dallo stesso segmento circolare come il semidiametro del segmento sferico sta alla sua altezza". Cavalieri dimostra che tale rapporto è

$$\frac{\omega M \cdot RV}{3RM^2 + MF^2}$$

con ω trovata per mezzo della proporzione $3MN : H\omega = \Delta V : RFV$.

5.3 Definizioni aggiuntive

Si riportano alcune definizioni tratte dal libro I ([3] pagg. 63-72) della *Geometria degli indivisibili* utili alla comprensione dei teoremi di Cavalieri, riguardanti il concetto di *riferimento* e di *similitudine*.

I. A.) Quando due linee rette tra di loro parallele toccano una figura piana, posta con esse in un medesimo piano, si chiami *vertice* un qualsivoglia punto di contatto, si chiamino *vertici opposti* i punti di contatto delle due rette tangenti parallele insieme presi; i vertici poi, quali che essi siano, si intenderanno sempre presi rispetto a una qualunque linea retta parallela a dette tangenti, la quale viene più sotto chiamata [linea di] *riferimento* (o *regola*).

II. A.) Quando piani tra di loro paralleli toccano un solido, ogni punto di contatto di esso solido si chiami *vertice*; e si chiamino *vertici opposti* i punti di contatto di ambedue i detti piani tangenti, insieme presi; i vertici poi, quali che essi siano, si intendano sempre presi rispetto ad un piano qualsiasi parallelo ai detti piani tangenti, il quale più sotto viene chiamato del pari [piano di] *riferimento*.

II. E.) Si chiamerà *riferimento* (o *regola*), nei piani, una linea retta, alla quale si conducono alcune linee parallele, e nei solidi, un piano, al quale si conducono alcuni piani paralleli (quali sono, in quanto si è sopra detto, la linea retta, oppure il piano, rispetto a cui si prendono i vertici, oppure i piani tangenti opposti: ad esso sono paralleli tutti e due i piani tangenti, o uno di essi).

VIII.) Si chiameranno *simili* [due] sferoidi, che hanno origine dalla rivoluzione di ellissi simili.

IX.) Chiameremo *simili* porzioni di sfere, o di sferoidi, e simili conoidi, o porzioni di conoidi, allorquando, condotti i piani per gli assi perpendicolari alle basi, le figure comprese nei solidi medesimi saranno simili (sottintendi: secondo la susseguente definizione X, o secondo le allegate definizioni di figure piane simili di altri [autori]), quando le sezioni con le basi di dette figure siano diametri omologhi delle basi, le quali verranno ad essere o circoli, o ellissi simili.

X. A.) Si chiameranno, in generale, *simili* due figure piane, in ognuna delle quali singolarmente presa possono essere condotte tangenti opposte, e segmenti aventi gli estremi su di esse, che le incontrano secondo il medesimo angolo dalla medesima parte, in modo che, se si conducono comunque linee rette tra le due tangenti opposte, ad esse parallele, secanti i segmenti che incidono le dette tangenti similmente dalla medesima parte, troviamo che le porzioni di queste parallele, nonché delle tangenti opposte, che sono poste dalla medesima parte tra i detti segmenti incidenti, e il perimetro delle figure, prese nel medesimo ordine, hanno tra di loro lo stesso rapporto dei segmenti rettilinei incidenti a dette tangenti, e aventi gli estremi su di esse.

Riferimenti bibliografici

[1] Archimede, *Opere*, a cura di A. Frajese, UTET, Torino 1974.

[2] J. Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum, Gesammelte Werke*, vol. IX, bearb. von Franz Hammer, Beck, Muenchen 1937.

[3] B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, a cura di Lucio Lombardo - Radice, UTET, Torino 1966.

[4] www-history.ncs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

[5] AA. VV., *l'Enciclopedia*, UTET, Torino 2003.

[6] AA. VV., *E12*, Istituto Geografico De Agostini, Novara 1977.